

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |       |
|---|---|---|---|---|----------|-------|
| 7 | 7 | X | X | X | 14       | Числа |
| 7 | 7 | X | X | X | 14       | И     |

## ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|                |             |                                    |
|----------------|-------------|------------------------------------|
| ЗАДАЧА № 11. 1 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М - 1 - 11 - 4                     |
|                |             | ШПФР (заполняется<br>Оргкомитетом) |

Да, сумма всех написанных на доске чисел может быть меньше 75.

Например числа: 5, 10, 20, 4, 8, 12, 1, 2, 3, 6

крайние 5: 5, 10, 20 - 3 шт.

крайние 4: 4, 8, 12, 20 - 4 шт

Сумма чисел: 5<sup>15</sup> + 10<sup>35</sup> + 20<sup>39</sup> + 4<sup>47</sup> + 8<sup>59</sup> + 12<sup>60</sup> + 1<sup>62</sup> + 2<sup>65</sup> + 3<sup>65</sup> + 6<sup>65</sup>

$$5 + 10 + 20 + 4 + 8 + 12 + 1 + 2 + 3 + 6 = 71 < 75.$$

Ответ: Да.

7

# ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|               |             |                                                   |
|---------------|-------------|---------------------------------------------------|
| ЗАДАЧА №11. 2 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 | М - 1 - 11 - 4<br>ШПФР (заполняется Оргкомитетом) |
|---------------|-------------|---------------------------------------------------|

Квадратный трехчлен  $P(x)$ . Его график — парабола, а как мы знаем, парабола симметрична относительно оси  $x = x_0$ , где  $x_0$  — координата  $x$  при вершине параболы (\* мы считаем, что график параболы начерчен в системе координат  $Oxy$ , т.е.  $y(x) = P(x)$  \*). Следовательно,  $P(x_0+g) = P(x_0-g)$ , где  $g$  — любое число.

Положим пусть  $x_0+k = b+c$ ,  $x_0-k = a$ ,  $x_0+n = a+b$ ,  $x_0-n = c$ ,  $x_0+l = a+c+b$ , где  $k, n, l$  — какие-то числа и  $k \neq n$ ,  $n \neq l$ ,  $k \neq l$ . Если эти условия будут выполняться, то равенства  $P(b+c) = P(a)$ ,  $P(c+a) = P(b)$ ,  $P(a+b) = P(c)$  будут так же верны. Попробуем же найти такие  $a, b, c$ , чтобы все эти равенства выполнялись.

$$\begin{aligned} \text{Если } x_0+k &= b+c \\ x_0-k &= a \end{aligned} \Rightarrow k = x_0 - a \Rightarrow x_0 + (x_0 - a) = b+c \Rightarrow 2x_0 = b+c+a$$

$$\begin{aligned} \text{Если } x_0+n &= a+b \\ x_0-n &= c \end{aligned} \Rightarrow n = x_0 - c \Rightarrow x_0 + (x_0 - c) = a+b \Rightarrow 2x_0 = a+b+c$$

↑ идентичны

$$\text{Если } x_0+l = a+c+b, \text{ то } b = a+c = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 = x_0 \Rightarrow b = x_0, x_0 = a+c. \text{ (т.е. } l=0).$$

Таким образом для любого квадратного трехчлена  $P(x) = bx^2 + px + q$ ,  $b \neq 0$ . (это просто формула квадрат. трехчлена) мы можем подобрать тройку чисел, где  $b = x_0 = \frac{-p}{2t}$ ,

$a = \frac{-p}{2t} + t$  и  $c = \frac{-p}{2t} - t$ , эти условия достаточно для выполнения условий. Только существует пара, где  $b \neq a$ ,  $a \neq c$  и  $c \neq b$ , т.к. существует много пар чисел подходящих  $\begin{cases} b = \frac{-p}{2t} \\ a \neq c \\ c+a = \frac{-p}{2t} \end{cases}$  ~~но надо только это доказать~~

рассмотрим такие  $a+c = \frac{-p}{2t}$ , где  $a > \frac{-p}{2t}$  и  $c < \frac{-p}{2t}$ , тогда можно представить следующее  $a = \frac{-p}{2t} + f$ , где  $f > 0$  и  $c = \frac{-p}{2t} - f = \frac{-p}{2t} - f$ . Тогда  $b \neq b+f$ ,  $b \neq b-f$  и  $b+f \neq b-f$ , т.е.  $b \neq a$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$ . ~~при этом  $P(b+c) = P(b+b) = P(2b) = 4b^2 + p(2b) + q = 4b^2 + 2pb + q$  (симметричный метр)~~

✓ X 6

# ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|                |             |                                                      |
|----------------|-------------|------------------------------------------------------|
| ЗАДАЧА № 11. 2 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 | М - 1 - 11 - 4<br>ШПФР (заполняется<br>Оргкомитетом) |
|----------------|-------------|------------------------------------------------------|

Покажем, что при  $\begin{cases} b = \frac{f}{2t} \\ a+c = \frac{f}{2t} \end{cases}$  равенства  $P(b+c) = P(a)$ ,  $P(c+a) = P(b)$ ,  $P(b+a) = P(c)$  верны.

$c+a = \frac{f}{2t} \Rightarrow a = \frac{f}{2t} - c$  и  $c = \frac{f}{2t} - a$ , следовательно,

$P(b+c) = P(b + \frac{f}{2t} - a) = P(b - \frac{f}{2t} - a) = P(b-a)$

Покажем, что при  $\begin{cases} b = \frac{f}{2t} \\ a+c = \frac{f}{2t} \end{cases}$   $P(b+c) = P(a)$ ,  $P(c+a) = P(b)$ ,  $P(b+a) = P(c)$ .

$c+a = \frac{f}{2t} = b \Rightarrow$

I.  $P(b+c) = P(a) = P(b-c) \Rightarrow P(b+c) = P(a) = P(b-c)$

$\begin{cases} a = b-c \\ c = b-a \end{cases}$

II.  $P(b+a) = P(c) = P(b-a) \Rightarrow P(b+a) = P(b-a) = P(c)$

III.  $P(a+c) = P(b) \Rightarrow P(b) = P(a+c)$

$\Rightarrow$  доказано.



| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$        |
|---|---|---|---|----|-----------------|
| 7 | 7 | 2 | X | X  | 16 $\checkmark$ |
| 7 | 7 | 2 | X | X  | 16 $\checkmark$ |

### ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|                |             |                                 |
|----------------|-------------|---------------------------------|
| ЗАДАЧА № 11. 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | 14-2-11-4                       |
|                |             | ППФР (заполняется Оргкомитетом) |

Пусть  $a_{2022}$ :

$$\begin{cases} a_{2022} - a_{1011} \geq 2022^3 - 1011^3 \\ a_{1011} - a_{2022} \geq 1011^3 - 2022^3 \end{cases}$$

$\Downarrow$  (т.к.  $a_{1011} = 0$  по уа.)

$$\begin{cases} a_{2022} \geq 2022^3 - 1011^3 \\ -a_{2022} \geq 1011^3 - 2022^3 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_{2022} \geq 2022^3 - 1011^3 \\ a_{2022} \leq 2022^3 - 1011^3 \end{cases} \Rightarrow a_{2022} = 2022^3 - 1011^3$$

Мы считаем  $a_{2022}$  и помним, что  $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3$ .  
 Но можно ли составить такую последовательность  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022})$ , чтобы  $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3$  и все условия задачи выполнялись?

Я могу привести подходящую последовательность: это последовательность, где  $a_g = g^3 - 1011^3$ , где  $g \in \mathbb{N}$  и  $g \in [1; 2022]$ .  
 (Примечание:  $g$  может быть равным 1011, т.к.  $a_{1011} = 1011^3 - 1011^3 = 0$ , что полностью удовлетворяет условию). Покажем теперь, что для любых  $n, k$  таких, что  $1 \leq n \leq 2022$  и  $1 \leq k \leq 2022$  будет выполняться условие  $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ .

В таком случае  $a_n = n^3 - 1011^3$ ,  $a_k = k^3 - 1011^3$ . Следовательно

$$a_n - a_k = n^3 - 1011^3 - (k^3 - 1011^3) = n^3 - 1011^3 - k^3 + 1011^3 = n^3 - k^3$$

$\Rightarrow a_n - a_k = n^3 - k^3 \Rightarrow$  неравенство  $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$

справедливо для нашей последовательности.  $\Rightarrow a_{2022}$  может принимать значение  $(2022^3 - 1011^3)$ .

25





## ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|                |             |                                  |
|----------------|-------------|----------------------------------|
| ЗАДАЧА № 11. 8 | ЛІСТ 1 ІЗ 1 | М-2-11-4                         |
|                |             | ШІФР (заповняється Оргкомітетом) |

Пример, где  $k=50$ : меняем числа  $(50 \text{ и } 49)$ ,  $(50 \text{ и } 48)$ ,  $(50 \text{ и } 47)$ ,  $(50 \text{ и } 46)$ , ...,  $(50 \text{ и } 2)$ ,  $(50 \text{ и } 1)$ . Таким образом мы сдвинем числа  $1, 2, 3, \dots, 48, 49$  на одно место по часовой стрелке, а число  $50$  у нас стоит там, где изначально стояла единица. Теперь мы меняем числа  $(50 \text{ и } 100)$ ,  $(50 \text{ и } 99)$ ,  $(50 \text{ и } 98)$ , ...,  $(50 \text{ и } 52)$ ,  $(50 \text{ и } 51)$ . Теперь все числа переместились на одну позицию по часовой стрелке, относительно своего начального положения.

Поэтому  $k=50$ .

Нет оценок. Только пример





# ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

|                |             |                                 |
|----------------|-------------|---------------------------------|
| ЗАДАЧА № 11. 7 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М-2-11-4                        |
|                |             | ШПФР (заполняется Оргкомитетом) |

Введем обозначение " $\Pi(x)$ " - произведение цифр числа  $x$ .

I. Произведение любых цифр в любом их количестве - значащее число и неотрицательное. ~~и неотрицательное~~.

$$\begin{cases} \text{Заметим, что } \Pi(n) = x \Rightarrow x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbb{Z}, \\ \text{Заметим, что } \Pi(n+1) = x-1 \Rightarrow (x-1) \geq 0 \text{ и } (x-1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 1 \text{ и } x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (+)$$

$\Rightarrow \Pi(n) = x$ , где  $x \geq 1$  и  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Pi(n) \neq 0 \Rightarrow$  в числе  $n$  нет нулей.

$$\begin{cases} \text{Заметим, что } \Pi(n+1) = y \Rightarrow y \geq 0 \text{ и } y \in \mathbb{Z} \\ \text{Заметим, что } \Pi(m) = y-1 \Rightarrow (y-1) \geq 0 \text{ и } (y-1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \geq 1 \text{ и } y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Pi(n+1) = y$ , где  $y \geq 1$  и  $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Pi(n+1) \neq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  в числе  $(n+1)$  нет нулей.

т.к. в  $\mathbb{N}$  числах  $n$  и  $(n+1)$  нет нулей, то  $\Pi(n) < \Pi(n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x < y \Rightarrow x-1 < y-1 \Rightarrow \Pi(m+1) < \Pi(m)$ . Но число

$(m+1)$  больше  $m \Rightarrow$  ~~тогда, когда~~  $\Pi(m+1) < \Pi(m)$  только тогда, когда в  $(m+1)$  есть нули и  $\Pi(m+1) = 0 \Rightarrow \Pi(m) \neq 0 \Rightarrow \Pi(m) > 0 \Rightarrow$  в  $m$  нет нулей  $\Rightarrow$  т.к. в числе  $m$  нет нулей а в  $(m+1)$  есть нули, то при прибавлении единицы к  $m$  мы переходим через разряд (десятков, сотен, единиц)  $\Rightarrow$  число  $m$  заканчивается на 9. Т.к. в числе  $m$  нет нулей, то  $\Pi(m) \geq 9$ . Таким образом  $\Pi(m) \geq 9$ , а  $\Pi(m+1) = 0 \Rightarrow y-1 \geq 9$ , ~~откуда~~  $y \geq 10$ , а  $m \geq x-1 \geq 0 \Rightarrow x=1$ , а  $y \geq 10$ . При этом  $\Pi(n) = 1$ ,  $\Pi(n+1) \geq 10$ , а такой скачок невозможно же, т.к. таким образом состоит только из единиц ~~тогда~~  $\Rightarrow (n+1)$  - единицы и одна двойка  $\Rightarrow \Pi(n+1) = 2$ , а  $2 < 10 \Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow$  это невозможно.

