1	2	3	4	5	Σ	подпись
7	7	4	X	0	18	
7	7	4	X	0	18	

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М - 1 - 10 - 19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Да, может.

Пример:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 20.

5; 10; 20 ⋮ 5

4; 8; 12; 20 ⋮ 4

$1+2+3+4+5+6+8+10+12+20=71<75$

верный пример приведён, 7 баллов

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-1-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$P(x) = k_1 x^2 + k_2 x^2 + k_3$

(1) $k_1 (b+c)^2 + k_2 (b+c) + k_3 = k_1 a^2 + k_2 a + k_3$

(2) $k_1 (a+c)^2 + k_2 (a+c) + k_3 = k_1 b^2 + k_2 b + k_3$

(3) $k_1 (a+b)^2 + k_2 (a+b) + k_3 = k_1 c^2 + k_2 c + k_3$

$\Downarrow$

(1) $k_1 (b^2 + 2bc + c^2 - a^2) + k_2 (b + c - a) = 0$

(2) $k_1 (c^2 + 2ac + a^2 - b^2) + k_2 (a + c - b) = 0$

(3) $k_1 (a^2 + 2ab + b^2 - c^2) + k_2 (a + b - c) = 0$

$\Downarrow$

(1)+(2) $k_1 (2c^2 + 2c(a+b)) + 2k_2 c = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)+(2) & 2ck_1(a+b+c) + 2ck_2 = 0 \\ (2)+(3) & 2ak_1(a+b+c) + 2ak_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. числа различны; только 1 из них может равняться 0 $\Rightarrow$ считаем, что $c \neq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2ck_1(a+b+c) + 2ck_2 = 0 \quad /:(2c)$

$k_1(a+b+c) = -k_2 \qquad k_1 \neq 0$

$a+b+c = -\frac{k_2}{k_1}$ ⊕ = 2х б

Предположим; $a = 0 \Rightarrow b + c = -\frac{k_2}{k_1}$

$b = -\frac{k_2}{k_1} - c$ — уравнение имеет бесконечное множество решений ~~при $k_2 \neq 0$~~; ~~то~~ но $c \neq -\frac{k_2}{k_1}$; иначе $b = 0 = a$; аналогично $b \neq -\frac{k_2}{k_1}$; $c \neq 0$;

$b \neq c \Rightarrow 2c \neq -\frac{k_2}{k_1} \quad c \neq -\frac{k_2}{2k_1}$.

далее рассматриваемся частный случай (но пример приведен)

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛІСТ 2 ІЗ 2	М-1-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

пример

$a = 0$

c – любое число, кроме $c = 0$; $c = -\frac{k_2}{k_1}$; $c = -\frac{k_2}{2k_1}$.

$b = -\frac{k_2}{k_1} - c$ при $k_2 = 0$ $b = -c$

Подставим a, b, c в равенства:

Контрпример: пусть $P(x) = k_1 x^2 + 0 \cdot x + k_3$ т.е. $k_2 = 0$

Возьмем $c = -\frac{k_2}{3k_1}$, тогда $b = -\frac{2k_2}{3k_1}$ и $b = c = 0$

искомое

$$\begin{cases} P(b+c) = P(a) \\ P(c+a) = P(b) \\ P(a+b) = P(c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1(b+c)^2 + k_2(b+c) + k_3 = k_1 a^2 + k_2 a + k_3 \\ k_1(a+c)^2 + k_2(a+c) + k_3 = k_1 b^2 + k_2 b + k_3 \\ k_1(a+b)^2 + k_2(a+b) + k_3 = k_1 c^2 + k_2 c + k_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} k_1\left(-\frac{k_2}{k_1} - c + c\right)^2 + k_2\left(-\frac{k_2}{k_1} - c + c\right) = 0 \\ k_1 c^2 + k_2 c = k_1\left(-\frac{k_2}{k_1} - c\right)^2 + k_2\left(-\frac{k_2}{k_1} - c\right) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{k_2^2}{k_1} - \frac{k_2^2}{k_1} = 0 \text{ – верное равенство} \\ k_1\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\left(2c + \frac{k_2}{k_1}\right) = -k_2\left(2c + \frac{k_2}{k_1}\right) \text{ – верное равенство} \end{cases} \end{cases}$$

При подстановке равенства верны, ч.т.д.

3 балла за продвижение в решении

7 баллов

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.3	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-1-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

x Сортов, в которых ровно 10 конфет всего „k".

Тогда если $n-k \geq 145$, то Вася может выбрать такую группу, что в ней будут все конфеты, кроме одной из каждого сорта, содержащего ровно 10 конфет:

конфеты – сорт (k)

не понятные конфеты

$$\overbrace{10,\ 10,\ 10,\ \dots\ 10,\ 10}^{k},\ \overbrace{a_1,\ \overset{a_2}{b},\ \overset{a_3}{c}\ \dots\ a_i}^{\text{не понятные конфеты}}\ -\ n \text{ конфет.}$$

$$\Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow\ \dots\ \Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow\ \dots\ \Downarrow$$

$$9,\ 9,\ 9,\ \dots\ 9,\ 9,\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \dots\ a_i\ -\ \text{выбранная группа.}$$

Конфет в выбранной группе $n-k$ ⇒

⇒ $n-k \geq 145$ ⇒ в точности 10 конфет одного сорта нет – противоречие к условию ⇒

⇒ $n-k < 145$.

$\boxed{k \leq \frac{n}{10}}$ условие без об'яснения

$n < 145 + k$

$n < 145 + \frac{n}{10}$

$0{,}9n < 145$

$n < 161\frac{1}{9}$ n – натуральное ч.

$n \leq 161$

при $n = 161$; $k \leq 16$

~~n – k ≥~~ $n - k \geq 161 - 16$

$n - k \geq 145$ – противоречие

не понятно к чему это противоречие

25

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-1-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$n \neq 161$

$n_{max} = 160$

Пример на $n = 160$:

$k = 16$

16 сортов по 10 конфет:

Чтобы в группе не оказалось их 10 конфет одного сорта, Вы Вася должен взять не более 9 конфет каждого сорта; но тогда:

$n \leq 9 \cdot 16 = 144 < 145$

пример ⊕ без полного обоснования

+2б

Ответ: $n = 160$

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Биссектриса $\angle A$ ($\triangle ABC$) проходит через центр вписанной в ABC окружности, то также она проходит через D; (т.к. $\cup BD = \cup DC$, $\angle BAD = \angle CAD$) $\Rightarrow$ DA – биссектриса $\angle D$ ($\triangle FED$), т.к. проходит через центр вписанной окружности.

0 баллов

6	7	8	9	10	Σ	Подпись
7	7	7	X	X		
7	7	7	X	X	21	

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

3 последовательных нечётных числа можно представить так:

$2k+1 \quad 2k+3 \quad 2k+5 \quad k$ – целое ч.

Выражение для суммы остатков имеет 3 случая:

1) $2k+2 \not\vdots\, 2022$; $2k+4 \not\vdots\, 2022 \Rightarrow$

$(2k+1)-2022n+(2k+3)-2022n+(2k+5)-2022n=$

$=((6k+9)-3\cdot 2022n)\vdots 3 \Rightarrow$ число не простое.

n – целое ; $2k+1 \not\vdots\, 2022$; $2k+3 \not\vdots\, 2022$; $2k+5 \not\vdots\, 2022$

т.к. нечётное не делится на чётное.

2) $2k+2 \vdots 2022 \Rightarrow$

$(2k+1)-2022n+(2k+3)-2022(n+1)+(2k+5)-2022(n+1)=$

$=3(2k+3-2022n)-4044$

$4044 \vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3(2k+3-2022n)-4044)\vdots 3$ – не простое.

3) $2k+4 \vdots 2022 \Rightarrow$

$(2k+1)-2022n+(2k+3)-2022n+(2k+5)-2022(n+1)=$

$=3(2k+3-2022n)-2022$

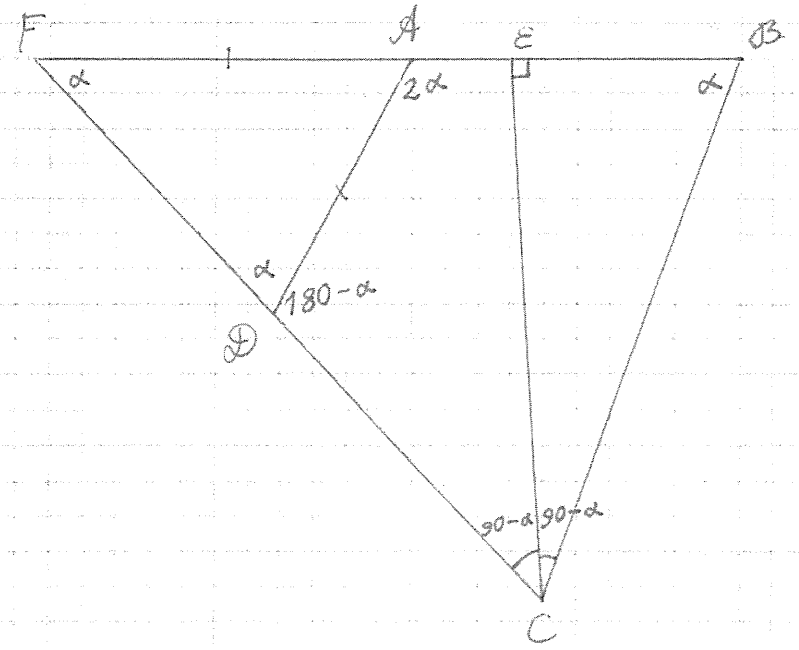
$2022 \vdots 3 \Rightarrow (3(2k+3-2022n)-2022)\vdots 3$ – не пр.

Ответ: нет, не может.

Число 3 : 3 и простое

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 27	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



$\angle B = \alpha$; $\angle A = 2\alpha$

Т.к. ABCD – вписанный, $\angle C = 180^\circ - \angle A =$
$= 180^\circ - 2\alpha$

$\angle D = 180^\circ - \alpha$

$\angle ECB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$

~~Да~~ Проведём прямые AB и DC, они пересекутся в F.

$\triangle BCF$:

7б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. ~~2~~ 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$\left.\begin{array}{l}\angle ECF = \angle ECB \\ \angle BEC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$ биссектриса это высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow CE$ – медиана ; $\angle F = \angle B = \alpha$.

$\angle FDA = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$

$\angle F = \angle D = \alpha \Rightarrow AF = AD$.

CE – медиана $\Rightarrow FE = EB$

$FE = AE + FA = AE + AD$

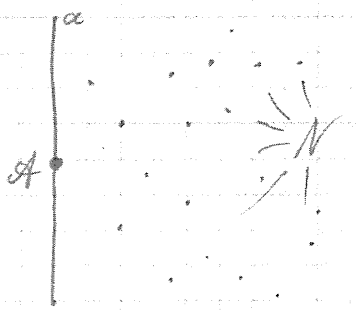
$EB = FE = AE + AD$ – ч. т. д.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

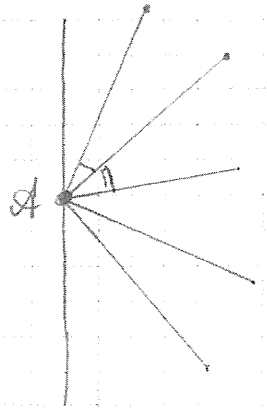
ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 3	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Никакие 3 точки не лежат на одной прямой, т.к. иначе из них нельзя составить треугольник.

Рассмотрим ~~край~~ одну из „крайних" точек (точки, через которые можно провести прямую, делящую плоскость на часть, содержащую все N точек, и часть, не содержащую ни одной, кроме „крайней"):



⇓



~~Пр~~ Соединим отрезками точку A со всеми остальными точками.

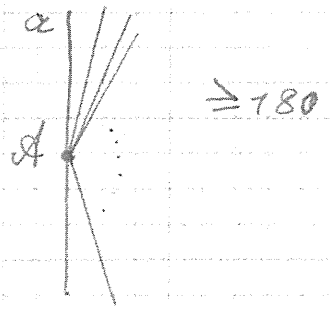
Ни один получившийся угол не меньше 1°, иначе можно составить треугольник, не удовл. условию

Можно убрать 1 сам, т.к. не 1 из крайних точек

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 3	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Предположим, $N \geq 181^\circ$, тогда кол-во полученных углов, не содержащих в себе другие углы, не меньше 180°:



Но при этом сумма ~~эт~~ всех этих углов ~~не может превосходить~~ меньше 180°, т.к. все точки, кроме A лежат по одну сторону от прямой a ⇒ т.к. каждый угол не меньше 1°, сумма ~~181 таких углов~~ не менее 180 углов не может ~~не превосходить 180°~~ быть меньше 180° ⇒ ⇒ предположение неверно.

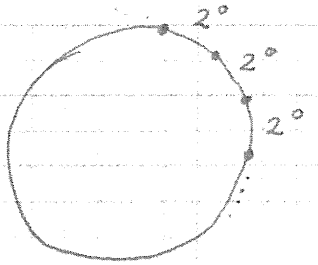
$N \leq 180$.

Пример на $N = 180$: +

Построим окружность и отметим на ней 180 точек, разбивающей её на 180 равных дуг (по 2° каждая):

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10, 8	ЛИСТ 3 ИЗ 3	М-2-10-19 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



Отмеченные точки и есть искомые.

При построении любого треугольника из этих точек каждый его угол будет вписанным и будет опираться на дугу, равную чётному числу градусов (т.к. она составлена из дуг по 2°) ⇒; вписанный угол, опирающийся на такую дугу всегда будет равен натуральному числу градусов ⇒ пример соответствует условию.