1	2	3	4	5	Σ	подпись
7	7	7	1	X	22	
7	7	7	1	X	22	
7	7	7	1	X	22	

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ: Да, может.

Пример:

Денис мог написать числа 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 20. Здесь ровно 10 чисел, можно выбрать три делящихся на 5 (5, 10, 20), и можно выбрать четыре делящихся на 4 (4, 8, 12, 20). А сумма $1+2+3+4+5+6+8+10+12+20=71$, а $71<75$, значит данные 10 чисел подходят.

+

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, т.к. $P(x)$ - квадратный трёхчлен по условию. Необходимо найти три числа, пусть x, y и z, такие, что $P(x+y) = P(z)$; $P(x+z) = P(y)$; $P(y+z) = P(x)$.

Рассмотрим два случая:

1) коэффициент $b = 0$:

Тогда $P(x) = ax^2 + c$. Возьмем $x = 1$; $y = 0$ и $z = -1$. частный случай

$P(x+z) = a \cdot 0^2 + c = c$; $P(y) = a \cdot 0^2 + c = c$,

значит $P(x+z) = P(y)$

$P(x+y) = a \cdot 1^2 + c = a + c$; $P(z) = a \cdot (-1)^2 + c = a + c$,

значит $P(x+y) = P(z)$

$P(y+z) = a \cdot (-1)^2 + c = a + c$; $P(x) = a \cdot 1^2 + c = a + c$,

значит $P(y+z) = P(x)$.

Следовательно при $b = 0$, существуют x, y и z такие что $P(x+y) = P(z)$; $P(x+z) = P(y)$; $P(y+z) = P(x)$, ч.т.д.

2) Коэффициент $b \neq 0$:

Тогда возьмём $x = -\frac{3b}{4a}$; $y = -\frac{b}{2a}$; $z = \frac{b}{4a}$.

Докажем, что $x \neq y$; $y \neq z$ и $z \neq x$.

$$x + y + z = -\frac{3b}{4a} - \frac{b}{2a} + \frac{b}{4a} = \frac{-3b - 2b + b}{4a} = \frac{-4b}{4a} = -\frac{b}{a} = 2x_b$$

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛІСТ 2 ІЗ 2	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомітетом)

Если $-\frac{3b}{4a} = -\frac{b}{2a}$, то $\frac{b}{2a} - \frac{3b}{4a} = 0$, и $\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = 0$, значит $\frac{b}{a} = 0$, но мы взяли $b \neq 0$ — противоречие;

Если $-\frac{3b}{4a} = \frac{b}{4a}$, то $-\frac{3b}{4a} - \frac{b}{4a} = 0$, и $-\frac{4b}{4a} = 0$, значит $\frac{b}{a} = 0$, но $b \neq 0$ — противоречие.

Если $-\frac{b}{2a} = \frac{b}{4a}$, то $-\frac{b}{4a} - \frac{b}{2a} = 0$, и $-\frac{3b}{4a} = 0$, значит $\frac{b}{a} = 0$, но $b \neq 0$ — противоречие.

Следовательно, $x \neq y$, $y \neq z$; $x \neq z$.

~~Высто~~ Докажем, что такие x, y и z подходят:

$P\left(-\frac{3b}{4a} - \frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{5b}{4a}\right)^2 + b\left(-\frac{5b}{4a}\right) + c = \frac{25b^2}{16a} - \frac{5b^2}{4a} + c =$
$= \frac{5b^2}{16a} + c$

$P\left(\frac{b}{4a}\right) = a\left(\frac{b}{4a}\right)^2 + b\left(\frac{b}{4a}\right) + c = \frac{b^2}{16a} + \frac{b^2}{4a} + c = \frac{5b^2}{16a} + c$,

значит $P(x+y) = P(z)$

$P\left(-\frac{3b}{4a} + \frac{b}{4a}\right) = P\left(-\frac{2b}{4a}\right) = P\left(-\frac{b}{2a}\right)$, значит $P(x+z) = P(y)$

$P\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{4a}\right) = P\left(-\frac{b}{4a}\right) = a\left(-\frac{b}{4a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{4a}\right) + c = \frac{b^2}{16a} - \frac{b^2}{4a} +$
$+ c = -\frac{3b^2}{16a} + c$

$P\left(-\frac{3b}{4a}\right) = a\left(-\frac{3b}{4a}\right)^2 + b\left(-\frac{3b}{4a}\right) + c = \frac{9b^2}{16a} - \frac{3b^2}{4a} + c = -\frac{3b^2}{16a} + c$,

значит $P(y+z) = P(x)$. Следовательно для любого квадратного трёхчлена существуют такие x, y и z, ч.т.д.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 3	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ: 160.

Докажем что ~~при n~~ можно взять 160 конфет так, чтобы взяв любые $145 \le n \le 160$ конфет среди них обязательно оказались ровно 10 конфет одного сорта.

Возьмём в начале 160 конфет 16 сортов, конфет каждого из которых ровно 10. Тогда всего $16 \cdot 10 = 160$ конфет. Предположим что мы взяли a_1 конфет I сорта, a_2 конфет II сорта, ..., a_{16} конфет XVI сорта, и среди них нет ровно 10 конфет одного сорта. Тогда $a_1 \le 9$; $a_2 \le 9$; $a_3 \le 9$; ...; $a_{16} \le 9$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{16} \le 144$. Но мы можем брать не менее 145 конфет. Значит, при 16 сортах, конфет каждого из которых ровно 10, мы не можем взять $145 \le n \le 160$ конфет так, чтобы среди них не оказалось ровно 10 конфет одного сорта. Значит, n может быть равно 160. +

Теперь докажем что n не может быть больше 160.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10 3	ЛИСТ 2 ИЗ 3	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Пусть мы взяли n конфет, где $n > 160$ и среди них взяв любые $145 \le x \le n$ у нас будет ровно 10 конфет какого-то одного сорта. Пусть среди n конфет у нас k сортов $(1 \le k \le n)$. Общее количество конфет i-ого сорта обозначим за a_i.

Давайте возьмём все n конфет. Среди них есть ровно 10 конфет одного сорта. Не исключая общности, будем считать что $a_1 = 10$. Теперь давайте возьмём $n-1$ конфету, не взяв одну конфету I сорта. Среди них есть 10 конфет одного сорта, но точно не первого. Значит общее кол-во конфет какого-то сорта, кроме первого (не исключая общности, скажем что второго) равно 10. $a_2 = 10$. Далее возьмём 9 конфет I и II сорта и все остальные конфеты. Их будет $n-2$. Аналогичными рассуждениями докажем что (не исключая общности) $a_3 = 10$. Далее проводим те же самые рассуждения ~~для~~ взяв $n-3$, $n-4$, ..., 145 конфет и получаем, что

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА №10. 3	ЛИСТ 3 ИЗ 3	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

~~a_{1}~~ $a_4 = 10$; $a_5 = 10$; ... $a_{n-145} = 10$, $a_{n-144} = 10$.

Мы знаем что у нас всего $n \geq 161$ конфет.

Но в первых ~~a_{n-144}~~ $n-144$ сортах у нас всего $(n-144)\cdot 10$ конфет. Значит, т.к. всего конфет n, то $(n-144)\cdot 10 \leq n$

$10n - 1440 \leq n$

$9n \leq 1440$

$n \leq 160$. Но мы предполагали что $n \geq 161$ – противоречие. Значит всего конфет не может быть больше 160, ч.т.д.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Рассмотрим сначала $P(x)$ при $n \vdots 2$.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. $a_n = a_1$, $a_{n-1} = a_2$; $a_{n-2} = a_3$; ...; $a_{[\frac{n}{2}]+1} = a_{[\frac{n}{2}]}$. И $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Давайте сгруппируем $a_n : x^n$ и a_0; $a_{n-1} x^{n-1}$ и $a_1 x$, и т.д. и вынесем коэфициента.

$a_n(x^n + 1) + a_{n-1}(x^{n-1} + x) + \ldots + a_{[\frac{n}{2}]+1}(x^{[\frac{n}{2}]+1} + x^{[\frac{n}{2}]})$.

Заметим, что раз $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, и $a_{n-k} = a_k$ для $0 \leq k \leq n$, то $a_{[\frac{n}{2}]+1} + a_{[\frac{n}{2}]+2} + \ldots + a_n = 0$. В таком случае $P(x)$ может быть n-ной степенью разности x и 1

а может не быть

$\Rightarrow$ Тогда при $n \geq 3$, $P(x) \vdots (x-1)^2$ т.е. $P(2028) \vdots (2027)^2$. n не может быть меньше 3. Пусть $n = 1$, тогда $a_1 x + a_0 = P(x)$, но $a_1 = a_0$ и $a_1 + a_0 = 0$, значит $a_1 = 0$ и $a_0 = 0$ — противоречие

+1б

Непонятный переход

6	7	8	9	10	Σ	подпись
7	7	7	2	X	23	[illegible]
7	7	7	2	X	23	[illegible]

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.6	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Давайте представим написанные на доске числа в виде $2022n + q$, где $n \in \mathbb{Z}$, $q \in N$ и $0 \le q \le 2021$. Тогда возможны три случая:

1) $2022 \cdot n + q$; $2022 \cdot n + q + 2$; $2022 \cdot n + q + 4$.

Если $0 \le q \le 2017$, то три последовательные ~~чёт~~ нечётные числа представимы в таком виде. Тогда сумма их остатков от деления на 2022 равна $q + q + 2 + q + 4 =$
$= 3q + 6 = 3(q+2)$, а если один из множителей делится на 3 то всё произведение кратно трём. Т.к. $q \ge 0$, то $3q + 6 \ge 6$, а значит $(3q+6) \vdots 3$ и $3q + 6 \ne 3$. Значит $3q+6$ — составное число

2) $2022 \cdot n + q$; $2022 \cdot n + q + 2$; $2022 \cdot (n+1) + 1$.

Это возможно только при $q = 2019$. Подставим и посмотрим на сумму остатков:

$2019 + 2019 + 2 + 1 = 4041$, а $4041 \vdots 9$, значит сумма остатков — составное число.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

3) $2022 \cdot n + q$; $2022 \cdot (n+1) + 1$; $2022 \cdot (n+1) + 3$.

Это возможно только при $q = 2021$.

Подставим и рассмотрим сумму остатков:

$2021 + 1 + 3 = 2025$, а $2025 \vdots 9$, значит сумма остатков - составное число.

Т. к. все числа на доске нечётные, то мы рассмотрели все возможные случаи, и во всех сумма получилась ~~нечёт~~ составной, значит она не может быть простой.

Ответ: Нет.

Примечание: чтобы $2022n + q$ было ~~про~~ нечётным, необходимо чтобы q было нечётным, т. к. $n \in \mathbb{Z}$ и $2022n$ всегда чётно. Поэтому мы рассматривали лишь нечётные q.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

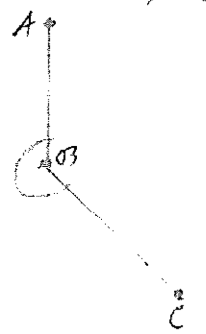
ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Оценка: точек не может быть больше 180.

Доказательство:

Давайте зафиксируем две точки, a_1 и a_2. Предположим что мы смогли расположить 181 точку ($a_1, a_2 .. a_{180}, a_{181}$) так, чтобы любые три из них образовывали треугольник с углами, величины которых - натуральные числа. Значит никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим углы $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5, \dots, a_1a_2a_{181}$. Будем считать углы против часовой стрелки и так, что ~~$a_1a_2a_k$~~ $0° \leq a_1a_2a_k \leq 360°$ (углы в 0° и 360° совпадают)

Например, угол $ABC = 225°$



ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.8	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Теперь, докажем что $\angle a_1 a_2 a_k \neq 179°$. Пусть это так. Тогда $\angle a_1 a_k a_2 + \angle a_2 a_1 a_k = 1°$, следовательно $\angle a_1 a_k a_2$ и $\angle a_2 a_1 a_k$ не могут быть одновременно натуральными.

Также заметим что ~~если $a_1 a_2 a_k = 0°$ то~~ если $a_1 a_2 a_k = 180°$, то $a_1 a_2 a_k$ – вырожденный треугольник. Также, если $a_1 a_2 a_k = x°$, а $a_1 a_2 a_i = x° + 180°$, то $a_k a_2 a_i$ – вырожденный треугольник. Следовательно углы могут равняться 1° или 181°, 2° или 182°; ... 178 или 358°. Всего у нас возможных значений углов $178 - 1 + 1 = 178$ (т.к. от 1 до 178). Две точки мы уже зафиксировали, а остальные 179 могут образовывать 178 углов – противоречие. Значит ~~углов~~ точек не может быть 181.

Пример:

Расположим 180 точек в вершины правильного 180-угольника. Тогда наибольший угол между 3 точками будет 178° (если точки в многоугольнике соседние) и наименьший – $(180° - 178°)/2 = 1°$ Ответ: 180.

(+)

7,5

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 12. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 4	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ. При $k=50$.

Пример:

Давайте возьмём фишку с номером 50 и 99 раз обменяем её с той, что находится на следующем против часовой стрелки месте. (Сначала с фишкой 49, потом 48, 47, ... 2, 1, 100, 99, ... 52, 51) Тогда фишка с номером 50 переместится на 99 позиций против часовой стрелки, и это равносильно перемещению на 1 позицию по часовой стрелке. Остальные фишки переместятся на 1 позицию по часовой стрелке. Значит, мы получили ~~их~~ необходимую конфигурацию.

$k=50$ всегда хватит, т. к. наибольшее различие номеров i-ой фишки и 50-ой равно 50 и достигается при $i=100$ $(100-50=50)$.

(+) Пример

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.4	ЛИСТ 2 ИЗ 4	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Оценка:

Для начала заметим, что чтобы фишке из исходного места попасть в необходимое, ей нужно сделать либо $i + 100 \cdot n$ шагов вперед (вперед — по часовой стрелке), либо $99 + 100 \cdot n$ шагов назад, где n — целое неотрицательное число. Будем считать, что если фишка сделала i шагов вперёд и i шагов назад, то она сделала 0 шагов. Заметим, что каждый обмен фишек местами это шаг назад для одной и шаг вперёд для другой. Пусть j фишек попали в необходимую позицию сделав 99 шагов назад. Тогда $100-j$ фишек попали в необходимую позицию сделав 1 шаг вперёд. Тогда общее кол-во шагов назад: $99 \cdot j$, и общее кол-во шагов вперёд это $(100-j) \cdot$. Эти числа равны только при $j = 1$. Но при $j > 1$. Какая-то из фишек могла сделать полный круг вперёд.

Надо считать все ходы назад и вперед (без сокращений) и считать обороты)

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 4	ЛИСТ 3 ИЗ 4	11-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Почему?

Тогда, давайте не будем делать этот круг вперёд и не будем делать один из кругов назад. Лишние круги не улучшат минимальное k, т.к. фишка, которой мы первой сделали круг гарантированно обменяется со всеми остальными. Значит, оптимальным вариантом будет сделать 1 круг назад $(5-1)$. В таком случае, все остальные обмены это просто обмен i-ой фишки с $i+1$-ой и обратно. Они также не улучшают нам ответ и их можно не делать. Значит нам необходимо просто сделать один круг назад одной из фишек. Тогда все остальные переместятся на 1 вперёд и необходимая конфигурация будет достигнута.

Но в таком случае, раз одна фишка поменяется со всеми остальными, то она поменяется с

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.4	ЛИСТ 4 ИЗ 4	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1-ой фишкой и с 100-ой. Пусть мы выбрали y-ую фишку и так получилось что нам хватило $k=49$. Значит $y-1<49$ и $100-y<49$. Сложив эти два неравенства получаем что $100-1<98$, т.е $99<98$ — противоречие. Значит, при $k<50$ необходимая конфигурация недостижима.

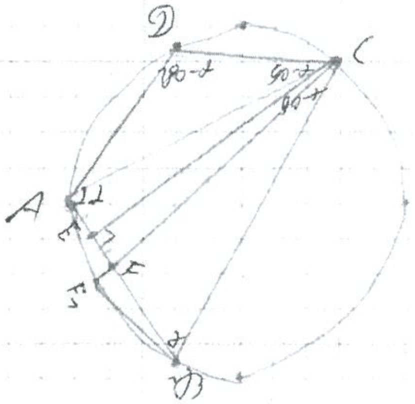
Ответ: $k=50$.

Пример +
Оценка −

2б

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



Дано:
$ABCD$ - вписанный
$\angle A = 2\angle B$
CE - биссектриса $\angle C$.

Доказать:
$\angle AD + \angle AE = \angle BE$

Доказательство:
Пусть $\angle B = \alpha$. Тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle D = 180 - \alpha$, т.к. $ABCD$ вписанный. и $\angle C = 180° - 2\alpha$, $\angle DCE = 90° - \alpha$, $\angle BCE = 90° - \alpha$. Тогда $\angle CEB = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$.
Проведем AC и отметим т. F так чтобы $AE = EF$.
Т.к. CE - ~~биссектриса~~ медиана и высота $\triangle ACF$, то CE - биссектриса $\angle ACF$. Пусть $ACF = \beta$. Тогда $FCB = \angle ACD = 90° - \alpha - \beta$. Продлим CF до пересечения с окружностью в точке F_1. Равные вписанные углы опираются на равные дуги, а равные дуги стягиваются равными хордами, значит $F_1B = AD$. Осталось доказать что FF_1B - равнобедренный.

Для этого нужно д-ть, что $\angle FCB = \angle DCA$.
Этого нет.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 10.2	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-2-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Рассмотрим треугольники ~~CF_1B и $\triangle CDA$~~.
$\triangle ACF$ и $\triangle FBF_1$. В треугольнике ACF $\angle ACF = 2\beta$,
а $\angle CAF = 90^\circ - \beta$. В $\triangle FBF_1$ $\angle BFF_1$ тоже равен $90-\beta$,
т.к. $\angle EFB = 180 - \angle FCB - \angle FBC = 180 - (90 - \alpha - \beta) - \alpha = 90 - \beta$.
Значит $\triangle CAF \sim \triangle FF_1B$, и следовательно
FF_1B равнобедренный и $FB = F_1B$, а т.к.
$AE = EF$ и $E_1B = AD$, то $FB = AD$ и $EB = AD + AE$.