1	2	3	4	5	Σ
7 ю.в	7 д.т	0 д.т	6	0	20
7 д.т	7 ю.в.	0 ю.в	6	0	20

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Да, может. Пример: эти числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20. из них на 5 делятся 5, 10, 20; на 4 делятся 4, 8, 12, 20. сумма всех чисел 71.

+

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ: 6

Пример: $N=1$, а Петя приписал цифры так, тогда простых чисел шесть: 41, 61, 13, 17, 11, 19

т.к. петя приписывал 9 различных цифр $\neq 0$, то это цифры 1,2,3,4,5,6,7,8,9

21 — $3\cdot 7$
41 — простое
61 — простое
51 — $3\cdot 17$
81 — $3\cdot 27$
13 — простое
17 — простое
19 — простое
11 — простое

Оценка: число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. N по модулю три может давать остаток 0, 1, 2. Рассмотрим каждый вариант.

1) $N \equiv 0 \pmod 3$ тогда, если приписать к N 3, 6 или 9, то сумма цифр будет делиться на 3 $\Leftrightarrow$ полученное число будет делиться на три $\Leftrightarrow$ полученное число не будет простым (в получ. числе не меньше двух разрядов $\Rightarrow$ оно не равно 3, но $\vdots$ 3); тогда простых чисел не больше $9-3=\underline{\underline{6}}$

2) $N \equiv 1 \pmod 3$ тогда, если приписать к N 2, 5 или 8, то число будет делиться на 3 $\Leftrightarrow$ не будет простым; тогда простых чисел не больше $9-3=\underline{\underline{6}}$

3) $N \equiv 2 \pmod 3$ тогда, если приписать к N 1, 4 или 7, то число будет делиться на 3 $\Leftrightarrow$ не будет простым; тогда простых чисел не больше $9-3=\underline{\underline{6}}$

Из вышесказанного следует, что, каким бы ни было число N, в трех случаях из девяти ~~оно не яв~~ полученное после Петиных действий число не является простым $\Leftrightarrow$ простых ≤ 6

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Пусть $P(x) = ex^2+fx+g$ $\quad$ k – натуральное число

Тогда $P(c)-P(d) = ec^2+fc+g-ed^2-fd-g = k^2$

$ec^2+fc-ed^2-fd = k^2$

$e(c-d)(c+d)+f(c-d) = k^2$

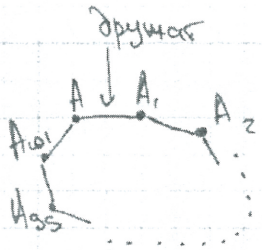
$(c-d)(e(c+d)+f) = k^2$

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ: 101.

Пример: +



Оценка: если людей ≥ 102, ~~тогда~~ и так как там не меньше 1 пары людей (0 – чётное), то найдутся такие 100 человек, что 2 оставшихся человека будут дружить между собой, тогда если всего в компании k пар дружащих людей, то среди этих 99 останется k – сумма степеней вершин этих людей $+1$. При этом степень каждой вершины графа чётна, так как если из компании убрать чьего-то друга, то там всё равно останется нечётное кол-во пар друзей. Тогда k – сумма степеней вершин этих людей $+1$ меняет чётность k.

1. Есть пример
2. Обосновано, что если 102, то можно удалить пару так, что количество оставшихся пар меняет чётность.
3. Нет явного объяснения, что ~~при удалении одного друга~~ степени вершин чётны. Хотя идея проговорена.

6.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-1-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Дано:

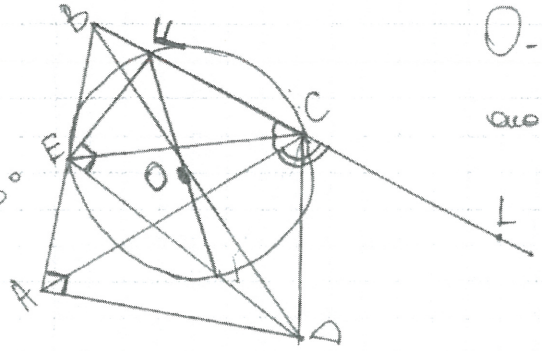
$\angle BCE = \angle ECA$

$\angle BAD = \angle DEF = 90^\circ$

$\angle LCD = \angle ACD$

Док-ть:

(·) $O \in BD$



O - центр окружности, описанной около $\triangle CEF$

нет решения

6	7	8	9	10	Σ	Подпись
7 дек	7 дек	6 н.в.	X	X	20	
7 ю.в.	7 ю.в.	0	X	X	20	

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-2-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

① Примем за n 2022 и 1011 за k. Тогда $n=2022, k=1011$,:

$a_{2022} - a_{1011} \geq 2022^3 - 1011^3 \quad | \quad (a_{1011}=0)$

$a_{2022} \geq (2022-1011)(2022^2 + 2022\cdot 1011 + 1011^2)$

$a_{2022} \geq 1011(1011^2\cdot 4 + 1011^2\cdot 2 + 1011^2)$

$a_{2022} \geq 7\cdot 1011^3$

② Примем за n 1011 и 2022 за k. Тогда $k=2022, n=1011$,:

$a_{1011} - a_{2022} \geq -2022^3 + 1011^3 \quad | \quad (a_{1011}=0)$

$-a_{2022} \geq (1011-2022)(1011^2 + 1011\cdot 2022 + 2022^2)$

$-a_{2022} \geq -1011(1011^2\cdot 4 + 1011^2\cdot 2 + 1011^2)$

$-a_{2022} \geq (-1011)^3\cdot 7$

$a_{2022} \leq 7\cdot 1011^3$

③ Так как $7\cdot 1011^3 \leq a_{2022}$ (пункт 1) и

$a_{2022} \leq 7\cdot 1011^3$ (пункт 2), то

$7\cdot 1011^3 \leq a_{2022} \leq 7\cdot 1011^3 \quad /\Rightarrow$

$/\Rightarrow a_{2022} = 7\cdot 1011^3$

Ответ: $a_{2022} = 7\cdot 1011^3$.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 3	М-2-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

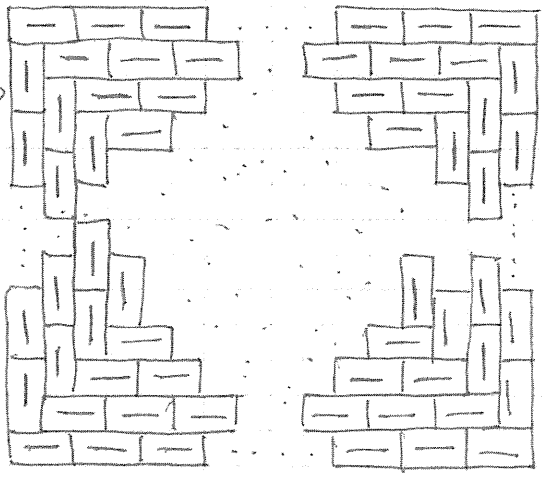
~~При первом разбиении образуется $\frac{100 \cdot 100}{1 \cdot 2} = 5000$~~ Из середины любой клетки после двух разбиений будет выходить ровно два отрезка: один синий и один красный (предположим противное — тогда из одной середины либо выходит ≤ 1 отрезк, что невозможно, т.к. Петя разбивал квадрат целиком, а значит, каждая клетка была задействована в двух доминошках (при первом разбиении в одной и при втором разбиении в одной), либо выходит > 2 отрезков, тогда из неё выходит ≥ 2 отрезков одного цвета (т.к. цветов всего 2, а отрезков > 2, то какие-то отрезки одинак. цвета), тогда получается, что при каком-то из разбиений эта клетка была одновременно частью двух доминошек, что невозможно, т.к. одна клетка при разбиении принадлежит только одной доминошке). Значит, они образуют сколько-то замкнутых несамопересекающихся ~~линий~~ ломаных (если ломаная незамкнутая, то из какого-то ее конца (точки) выходит только один отрезок, а у нас из каждой точки выходит два отрезка; если ломаная самопересекающаяся, то из какой-то её точки выходит > 2 отрезков, а у нас из каждой точки выходит 2 отрезка). Однако, чтобы из каждой клетки можно было попасть в любую другую, идя по синим и красным отрезкам, замкнутая несамопересекающаяся ломаная должна ~~проходить~~ быть одна и проходить через все клетки (если их несколько,

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

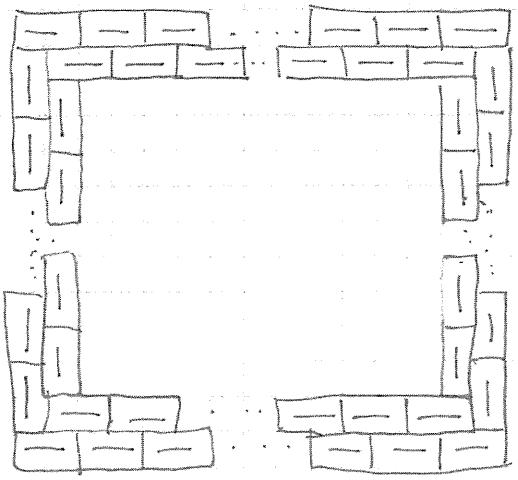
ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 2 ИЗ 3	М-2-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

то с одной нельзя попасть на другую). Из этого следует, что все синие и красные отрезки образуют одну замкнутую несамопересекающуюся ломаную, проходящую через все клетки.

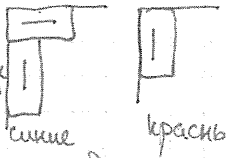
① Рассмотрим случай, когда первое разбиение вам выглядит так: →



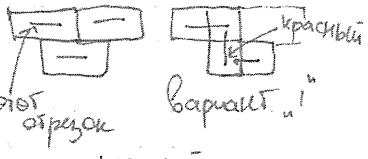
② Рассмотрим две (случая) крайних линии и ряда: (самые крайние — это когда только один)



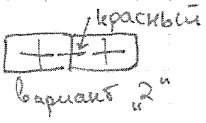
③ Заметим, что у угловых клеток есть только один вариант проведения красного отрезка: мы не сможем провести отрезок, т.к. иначе из них будет выходить только один отрезок.



④ Заметим, что для любого края синего отрезка из крайнего ряда или линии есть только два варианта проведения красного отрезка:



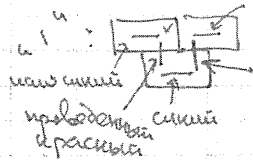
(для всех кроме угловой клетки, рассмотренной в пункте 3). При этом при проведении красного отрезка как в варианте „2", полученная ломаная не соединена с другими крайними (что такое крайние, указано в пункте 2) отрезками, а при проведении как в варианте „1",



ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 3 ИЗ 3	М-2-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

~~получается~~ ~~вот~~ у соседнего синего отрезка остается только один вариант проведения красного: так, у одного из его краев больше нет возможности провести красный по варианту „2", поэтому можно провести только по варианту „1":



вариант „1", потому что если провести по варианту „2", то из клетки, отмеченной галочкой, будет выходить 3 отрезка.

Таким образом, после проведения этих красных, полученная ломаная не соединена с некрайними отрезками (а что такое крайние, смотрите в пункте 2). Из этого следует, что после проведения всех отрезков два крайних ребра (или один) образуют одну ломаную, которая в любом случае не будет соединена с некрайними ребрами и линиями ~~вообще мы рассмотрели все способы проведения отрезков красных~~ * $\Longrightarrow$ в этом случае (случай из пункта 1) невозможно соединить все отрезки в одну замкнутую несамопересекающуюся ломаную $\Longleftarrow$ Петя необязательно имеет возможность добиться желаемого.

* (Мы рассмотрели все способы проведения красных отрезков для крайних синих отрезков (самых крайних) ~~одно~~, и ни один из них не позволяет соединить синие крайние отрезки с синими не крайними.

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-2-9-6 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BD}$

Дано:

ABCD – трапеция

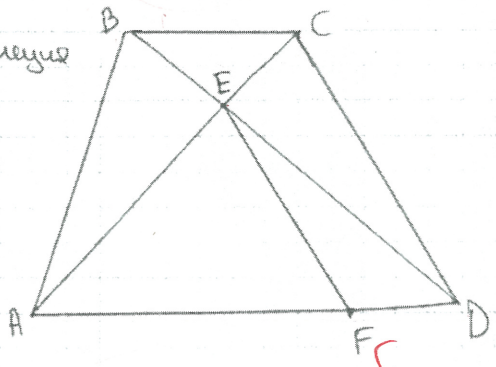
AD ∥ BC

EF ∥ CD

AD = BD

Док-ть:

BE = DF



Решение:

$\triangle BCE \sim \triangle AED$ (∠BEC = ∠AED (вертикальные), ∠CBD = ∠BDA т.к. BC ∥ AD)

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DB}$

$\triangle AEF \sim \triangle ACD$ (∠AEF = ∠ACD и ∠AFE = ∠ADC т.к. EF ∥ CD (по условию))

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$

т.к. $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$ и $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DB}$,

$\frac{AF}{AD} = \frac{DE}{DB}$, а т.к. AD = BD (по условию),

то $\frac{AF}{AD} = \frac{DE}{AD} \Leftrightarrow AF = DE$

BE = BD − ED

FD = AD − AF

BD = AD, ED = AF $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ BE = FD

что

пропущен шаг 1 обоснов. касающ. пропорциональности AE : AC = DE : DB.

оценка снижена на 1 балл

6.