

Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера

2021 год, 1 день

Шифр: 806

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
3 <i>Дж</i>	7 <i>В.В.</i>	0 <i>МД</i>	X	X	10
3 <i>Ю.В.</i>	7 <i>Ю.Г.</i>	0 <i>Дж</i>	X	X	
3 <i>МД</i>	7 <i>МД</i>	0 <i>Ю.В.</i>			

(N1)

Пусть n — натур. число, больше 1000000

$n : 90 = a$ (ост. x) Цифры в разряде сотен — ?

$n : 125 = b$ (ост. z)

при $x=0$:

$n : 90 \Rightarrow n : 9$ — посл. 2 цифр образ. число, кратное 9

$n : 10$ — посл. цифра = 0

$n : 125 \Rightarrow$ посл. 3 цифры образ. число, кратное 125.

Тогда ~~последними~~ тремя цифрами могут быть: 000 или 500.

при $x=39$:

последними тремя цифрами могут быть: 039 или 539.

при $x > 39$ при $39 < x \leq 125$ остатки от деления на 90 и на 125 не ~~совсем~~ равны.

$\Rightarrow$ последними ^{трех} цифрами могут быть числа от 000 до 039 и от 500 до 539.

Ответ: цифры в разряде ^{сотен} ~~десятков~~ могут быть 5 и 0.

(N2)

$$x^2 - x > y^2$$

~~$x(x-1)$~~

$$y^2 - y > x^2$$

знак произв. $x \cdot y$ — ?

при $x = -2; y = -2,1$

$$4 + 2 > 4,41$$

$$x \cdot y = 4,2$$

$$4,41 + 2,1 > 4$$

$\Downarrow$ знак произв. $x \cdot y$ может быть +.

$x \cdot y < 0$ только если ~~$x < 0$ и $y > 0$~~ (или наоборот)

$$x^2 - x = y^2 + k \quad k > 0, \text{ т.к. } x^2 - x > y^2$$

$$y^2 = x^2 - x - k$$

$$x^2 - x - k - y > x^2$$

$$-x - k - y > 0$$

$$-k > x + y \Rightarrow x + y < 0 \text{ (т.к. } k > 0) +$$

т.к. $x < 0$, а $y > 0$, то $|x| > y \Rightarrow x^2 > y^2$
 Если утв. $y^2 - y > x^2$ верно, то $y > y^2 - x^2 \Rightarrow y < 0$, что про-
 тиворечит условию.

$\Rightarrow$ при $x < 0$ и $y > 0$ утверждения $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$
 не верны одновременно.

Аналогично при $x > 0$ и $y < 0$.

$$\Rightarrow x \cdot y > 0$$

Ответ: $x \cdot y > 0$.

(N3)

Пусть мальчиков меньше чем девочек (в противном
 случае рассуждения также верны, но для девочек)
 Каждый мальчик не может знать всех девочек, так как
 девочек > 39 .

Тогда у x -х любых мальчиков не может быть одинаковых
знающих девочек (т.к. тогда у одной девочки будет
 больше знающих мальчиков, чем у других). неверно

$\Rightarrow$ кол-во девочек (y) равно кол-ву мальчиков (x):

$$y : x \quad y = 39 - x$$

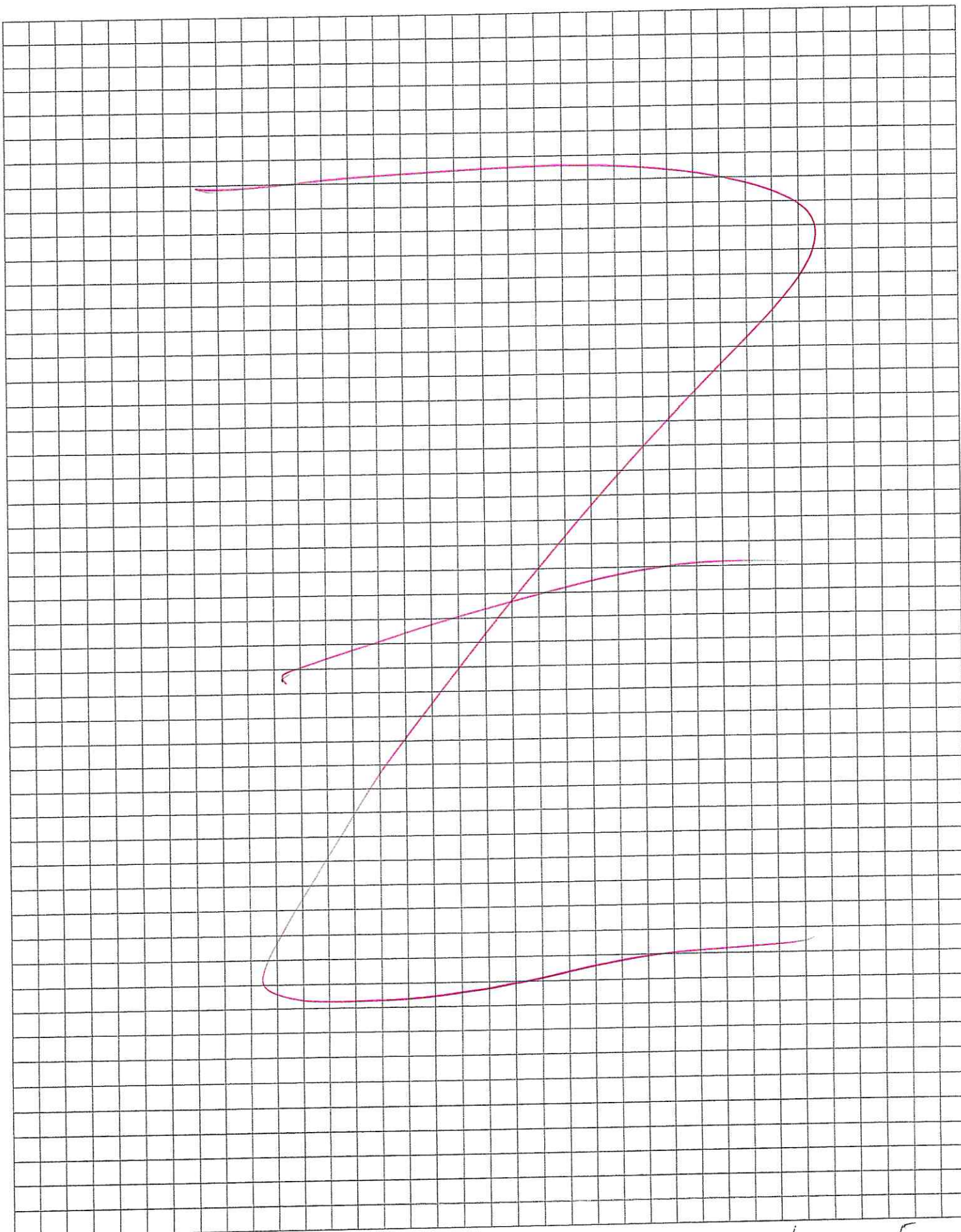
$$39 - x : x \Rightarrow 39 - x = n \cdot x$$

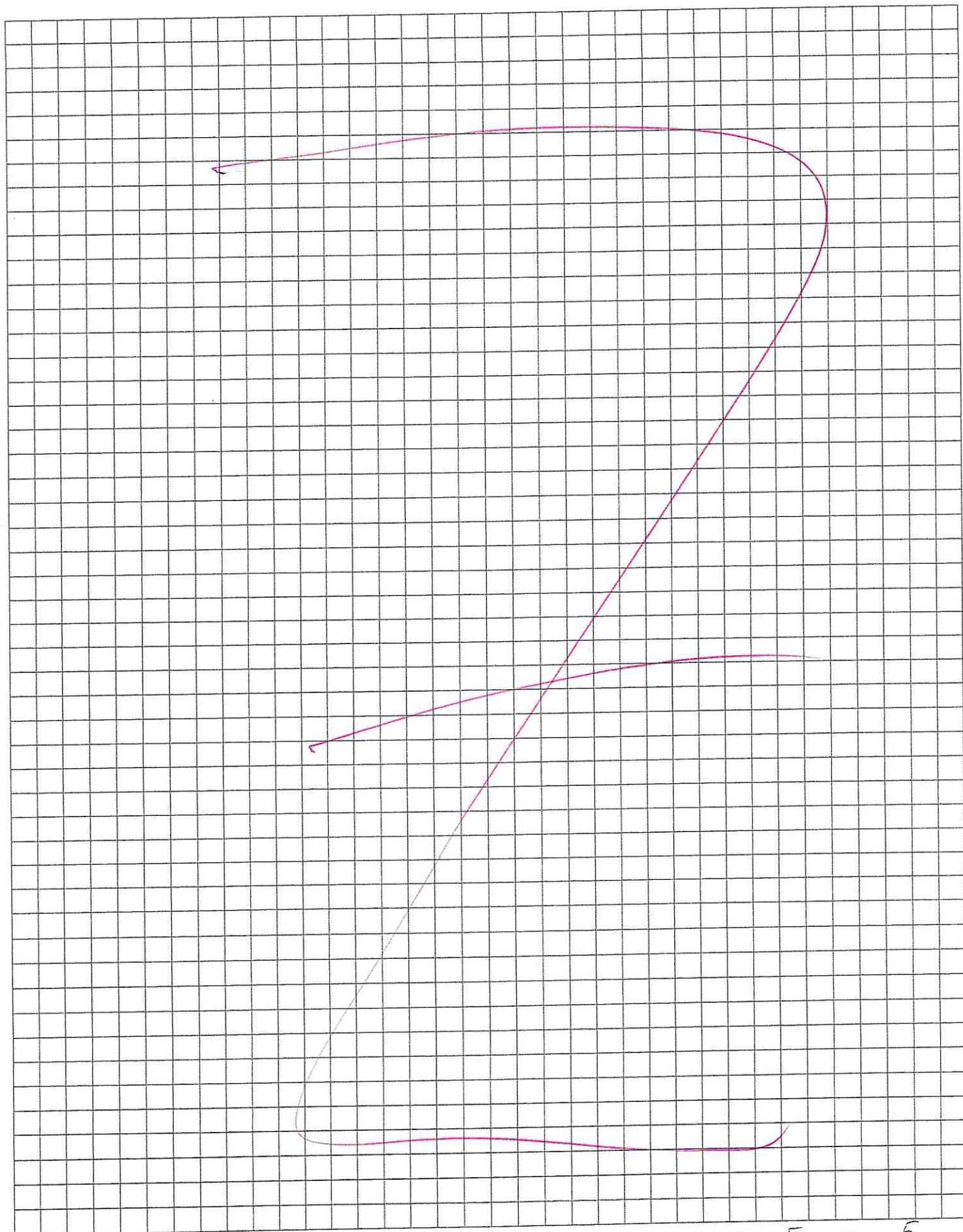
$$39 = x(n + 1) \quad 39 - \text{простое число}$$

$\Rightarrow$ утверждение ~~$39 - x = n \cdot x$~~ $y : x$ ложно.

$\Rightarrow$ так быть не может.

Ответ: Нет, так быть не может.





Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера

2021 год, 2 день

Шифр: 806

Таблица для жюри

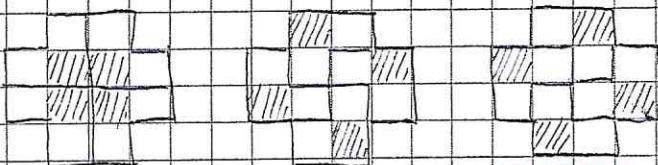
6	7	8	9	10	Сумма
7 МД	7 МД	0 МД	0 Ю.В	X	14
7 ДЖ	7 ДЖ	0 ДЖ	0 ДЖ	X	
7 Ю.В	7 Ю.В	0 Ю.В	0 МД	X	

М6

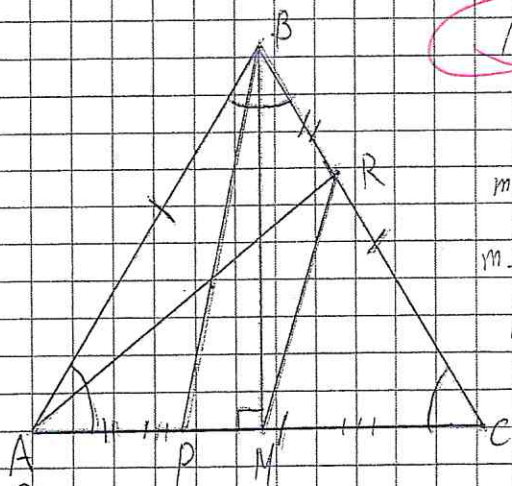
Ответ: да, существует.

Искомая фигура

/// — центральные клетки



N7

Дано: $\triangle ABC$ — равнобедр.м. M — середина AC м. $P \in AM$; м. $R \in BC$; $AP = BR$ Найти: $\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR$ 

Решение:

BM — медиана (по усл.) $\Rightarrow BM$ — бисс. и высота $\triangle ABC$ (по св-ву удб треуг.)

Рассмотрим $\triangle ABR$ и $\triangle BAP$: AB — общая сторона $\angle PAB = \angle ABR$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ABR = \triangle BAP$ (по I признаку равн. треуг.) $AP = BR$ (по усл.) $\Rightarrow \angle ARB = \angle APB$ $\angle PMR + \angle MRB + \angle RBP + \angle BPM = 360^\circ$ $\angle PMR = \angle BMR + \angle PMB = \angle BMR + 90^\circ +$ $\angle RBP = \angle PMR - \angle BPM + \angle MBR = \angle BMR + 90^\circ +$

$$\angle MRB = \angle ARM + \angle ARB = \angle ARM + \angle APB$$

$$\angle MPB = 180^\circ - \angle APB$$

$$\angle BMR + 90^\circ + \angle PBM + 90^\circ + \angle ARM + \angle APB + 180^\circ - \angle APB = 360^\circ$$

$$\angle BMR + \angle PBM + \angle ARM = 60^\circ$$

Ответ: $\angle BMR + \angle PBM + \angle ARM = 60^\circ$ +

М8

Если все разрезы соединяют одну и те же стороны, то разрезов 2019. *известно*



3



4 -

Если n разрезов соединяют не те же стороны, что и остальные, то разрезов $\frac{2020}{n+1} + n$? *отсюда формула неизвестна*

Дима вырезает круг в наиболее широкой области наименьшей части.

Если сделано 2019 параллельных разрезов, то $r = \frac{1}{2020}$ *ч/сл.*
 а ширина каждого разреза $= 2 : 2020 = \frac{1}{1010}$
 тогда длина радиусов $S = \frac{1}{2020} \cdot 2020 = 1$. Если хотя бы

1 из 2019 разрезов не параллелен остальным, то $S > 1$, т.к. будет хотя бы 2 части в форме трапеции, у которых есть основание $> \frac{1}{1010}$, значит можно вырезать более широкий круг.

Если есть хотя бы n разрезов, соединяющих не те же стороны, что и остальные, то $S > 1$, т.к. будет не менее $\frac{2020}{n+1}$ разрезов, частей, у которых в наиболее широкой

области есть возможность вырезать круг с $r = \frac{2}{n+1}$
 $r = 2 : \left(\frac{2020}{n+1} \right) = \frac{2n+2}{2020} = \frac{n+1}{1010}$, а также части с наиболее широкой областью наименьшего размера.

N 9

$$n! \div 2$$

при $n \geq 2$

$$n^2 \div 2 \text{ и } n^3 \div 2, \text{ если } n \div 2$$

$$\text{при } n \not\div 2$$

$$(n! + n^3 + 1) \div 2 \Rightarrow n! + n^3 + 1 \text{ — не простое число}$$

$$\Rightarrow n \div 2$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2) \div 2$$

но это не доказывает, что
это можно представить в
виде суммы простых чисел.