

Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера

2021 год, 1 день

Шифр: 801.

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
0 ДА	20 К.Б.	7 МД	X	0	9
0 МД	2 ПОГ	7 ДА	X	0 ДА	
0 Ю.Б.	2 МД	7 Ю.Б.	X	0 Ю.Б.	

11. Данное число - $\overline{axyz}$, где a - натуральное число, x, y, z - цифры, а $\overline{axyz} > 1000000$

Данное число делится на 40 и 125 только если $\overline{xyz} : 40$ и $\overline{xyz} : 125$ - по свойствам делимости. Тогда $\overline{xyz} = 0$ (лишь при обзоре крайних, меньших 1000, 40 и 125 нет).

$\overline{xyz} = r \equiv \overline{xyz} \pmod{125}$ - по условию, где r - остаток.

$r \leq 39$ (иначе $r \equiv \overline{xyz} \pmod{125}$ и т.д. $\overline{xyz} : 125$ только при $\overline{xyz} = 0$)

$\overline{xyz} \leq 39$, т.е. $y \leq 3$.

Ответ: цифры в разряде сотен не превышают 3 , т.е. может быть $0, 1, 2, 3$.

12.

$$x^2 - x > y^2 \quad \text{и} \quad y^2 - y > x^2$$

$$x(x-1) > y^2 \quad y(y-1) > x^2$$

$$x(x-1) + y(y-1) > y^2 + x^2$$

$$x(x-1) - x^2 > y^2 - y(y-1)$$

$$x(x-1-x) > y(y-y+1) \rightarrow \text{Если } x=0, \text{ то } y=0.$$

$-x > y$ $\rightarrow$ Если $x < 0$, тогда $-y > x < 0$, т.е. y может быть как положительным, так и отрицательным (так и 0).

След. xy может иметь любой знак (и быть 0).

Если $xy > 0$, тогда $-y > x > 0, y < -x < 0, xy < 0$.

1/2.

Ответ: Ну может быть холостяком, отшельником и С.

1/3.

Предположим, это возможно.

Пусть мальчик x , а знакомств между мальчиком и девочками z , тогда девочек $49 - x$.

$z = x \cdot k$, где k - кол-во знакомств девочек у мальчика ($k \leq 39$).

$z = (49 - x) \cdot l$, где l - кол-во знакомств мальчиков у девочки ($l \leq 39$).

$$xk = (49 - x) \cdot l$$

$$xk = 49l - xl$$

$$xk + xl = 49l$$

$$x(k + l) = 49l, \quad k + l \leq 39 + 39 = 78.$$

$$x(k + l) \leq 78x$$

$49l \leq 78x$ — x и l натуральные, не превышающие 39, след. $49 > l$.

Тогда

$$xk = (49 - x)l$$

$l = \frac{xk}{49 - x}$, $x \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, значит $xk : (49 - x)$.

49 — простое число, след. $49 - x$ и x — взаимнопростые, тогда

$k : (49 - x)$, наименьшая $k = 49 - x$.

При $x < 40$, $49 - x > 39$, наименьшая $k > 39$ — Противоречие.

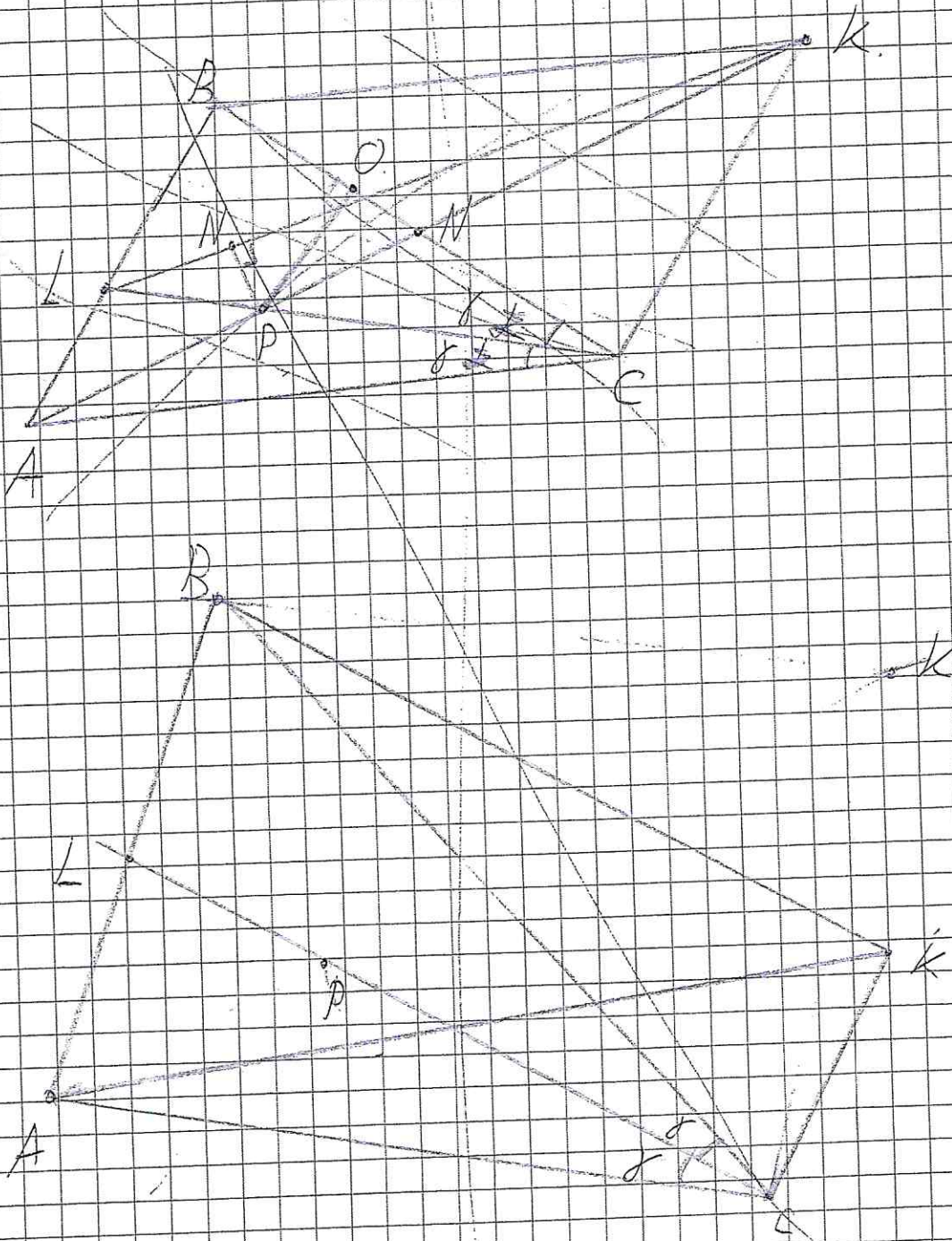
При $x \geq 40$, при наименьшей k наименьший l : $l = \frac{x(49 - x)}{49 - x} =$

$= x$, $l \geq 40$ — противоречие.

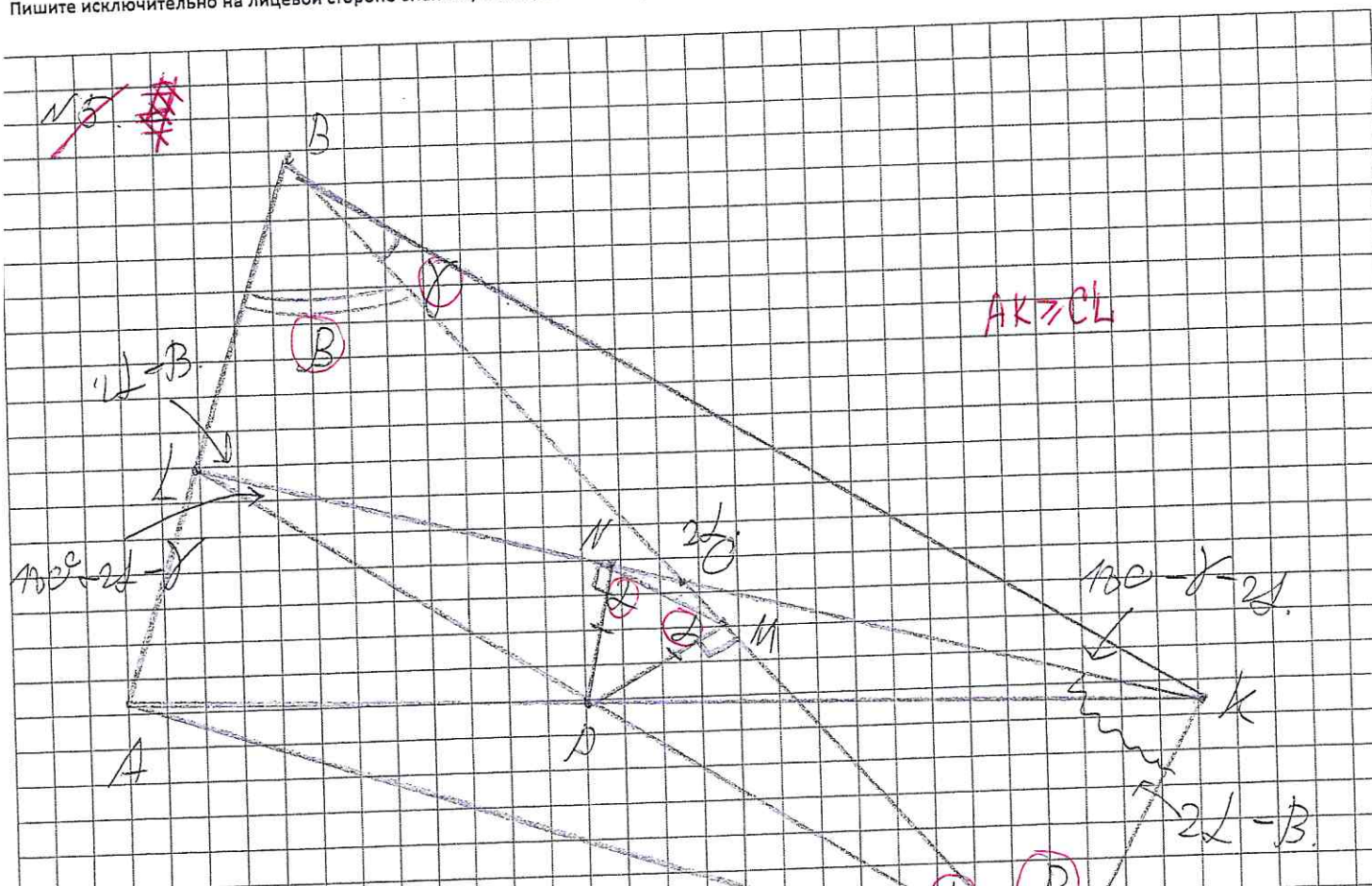
Ответ: не может

115 0

9.4.



См. см. лист 4



Пусть $\angle BCL = \angle LCA = \alpha$,

$PL = PM$ по условию, след $\triangle PNM$ - равнобедр., след $\angle PNM = \angle NMP = \beta$.

Пусть $\angle ABC = \beta$.

$\angle LCB = \angle CBK = \alpha$ ($CLBK$ - параллелограмм, BC - секущая, BL и CK , $\angle LCB$ и $\angle CBK$ - накрест лежащие).

$\angle OMM = \angle OMN = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle NOM = 180^\circ - 2 \cdot 90^\circ + 2\beta = 2\beta$

$\angle BCK = \angle NOM = 2\beta$ (вертикальные)

$\angle BKC = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle LKC = \angle BKC - \angle BKL = 180^\circ - \alpha - \beta - 180^\circ + \alpha + 2\beta = 2\beta - \beta$

$\angle KLC = 180^\circ - 2\beta + \beta - \alpha - \beta = 180^\circ - 2\beta - \alpha$

$\angle OLC = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ ($\triangle LOC$)

остаток

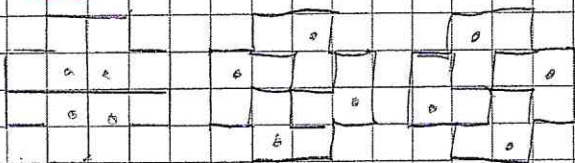
Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера
2021 год, 2 день

Шифр: 821

Таблица для жюри

6	7	8	9	10	Сумма
7 м.д.	7 м.д.	0 м.д.	X	0 м.д.	14
7 Д.д.	7 Д.д.	0 Д.д.	X	0 Д.д.	
7 ю.в.	7 ю.в.	0 ю.в.	X	0 ю.в.	

1/6



— Пример такой фигуры.
(• — центральная клетка)

Ответ: да, существует.

1/8.



найти

Если свести квадрат на 2020 одинаковых полосок (используя 2019 параллельных разрезов), то он может вырезать из каждой полоски круг, радиусом равный $\frac{1}{2}$ ширины полоски. Тогда сумма радиусов $2020 \cdot \frac{1}{2} = 1010$. (2 — длина стороны квадрата, т.е. диаметр всех кругов равна длине стороны).



Если свести или убрать любую линию разреза (оставляя кол-во частей в 2020), некоторые старые полосы могут измениться или исчезнуть, но на ~~их~~ месте обязательно появится новая часть, из которой можно вырезать круг не меньшего радиуса, чем из старой полоски (либо новый разрез не пересекает линий старых разрезов, и новый разрез не уменьшает радиус нового выделенного круга; либо новый разрез пересекает старые разрезы, ^{некоторые} тем создает новые части и вынуждает убрать старые линии разрезов (кол-во частей всегда 2020)).

Так, Лима всегда может вырезать круг, суммарный радиус которых не меньше 1.

110

Если изначально в таблице все числа внутри одного столбца/строки одинаковы, то можно добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1. 1 число отличается от группы в своей строке и в столбце.

Иначе (если хотя бы 1 ~~отличающееся~~ ^{отличающееся} число в строке/столбце):

1	2
2	1

Рассмотрим такой квадрат 2×2 , в котором есть хотя бы 1 отличающееся число (помимо остальных).

При прибавлении единицы или деления любого столбца/строки, отличающееся число может меняться, может передвигаться в другой угол маленького квадрата 2×2 , но оно всегда будет оставаться в этом маленьком квадрате, а значит оно останется и на большом квадрате (если в малом квадрате изначально 2 одинаковых, отличающихся от группы чисел, то которые стоят в одном столбце/строке, несомненно рассмотрим другой, "критичный" квадрат, в котором числа в одном столбце/строке не равны (если в столбце/строке есть отличные от группы числа, такой квадрат обязательно есть в таблице)).

Ответ: Инвариант: отличное число в столбце/строке никуда не уходит с таблицы.

Если каждое число равно 1, все эти числа равны, что противоречит инварианту в некоторых случаях.

Ответ: не всегда можно (нельзя, если есть число, отличное от группы чисел в своей строке и столбце).

№ 7.

Найти: $\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR$.

Решение:

Пусть $\angle PBM = \angle$.

$$CP = AC - AP; \quad RC = BC - BR$$

$$CP = RC, \text{ т.к. } AC = BC \text{ — боковые,}$$

$$AP = BR \text{ — по условию.}$$

Тогда $AB \parallel RP$ — по теореме

о пропорциональных отрезках.

$$\left(\frac{PC}{AC} = \frac{RC}{BC}, \text{ т.к. } AC = BC \text{ и } PC = RC \right).$$

Рассмотрим $\triangle ABR$ и $\triangle BAP$: $AP = BR$, $\angle BAP = \angle ABR = 60^\circ$ по условию, AB — общая сторона. $\Rightarrow \triangle ABR = \triangle BAP \Rightarrow \angle ABP = \angle BAP = \beta$. $(+)$

$$BM \text{ — медиана и биссектриса } (\triangle ABC \text{ — равносторонний}) \Rightarrow \angle ABM = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ. \quad (+)$$

$$\beta + \angle = \angle ABM = 30^\circ \Rightarrow 30^\circ - \angle = \beta \quad (+)$$

$$\angle RAM = \angle BAC - \beta = 60^\circ - 30^\circ + \angle = 30^\circ + \angle. \quad (+)$$

$$\text{В } \triangle ARM: 180^\circ = \angle RAM + 90^\circ + \angle BMR + \angle ARM = 30^\circ + \angle + 90^\circ + \angle BMR + \angle ARM. \quad (+)$$

$$60^\circ = \angle + \angle BMR + \angle ARM = \angle PBM + \angle ARM + \angle BMR \quad (+)$$

$$\text{Ответ: } \angle PBM + \angle ARM + \angle BMR = 60^\circ.$$