

Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера

2021 год, 1 день

Шифр: 803

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
7 ю.в	7 ю.к	0 ДА	0 МД	0	14
7 МД	7 ю.г	0 МД	0 ДА	0 ДА	
7 ДА	7 МД	0 ю.в	0 ю.в	0 ю.в	

М3

Пусть в группе n мальчиков и m девочек. Тогда $n + m = 49$. Пусть 1-ый мальчик знает a_1 девочек, 2-ой a_2 девочек, 3-ий знает a_3 девочек, ..., n -й мальчик знает a_n девочек. Тогда t - среднее арифметическое этих значений, т.е.

$$t = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n}; \text{ причем } t \text{ - не обязательно целое.}$$

Пусть 1-ая девочка знает b_1 мальчиков, 2-ая девочка знает b_2 мальчиков, 3-ья девочка знает b_3 мальчиков, ..., m -ая девочка знает b_m мальчиков. Тогда y - среднее арифметическое этих значений, т.е.

$$y = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{m-1} + b_m}{m}; \text{ причем } y \text{ - не обязательно целое.}$$

Выходит всего знакомств мальчиков с девочками tn , а знакомств девочек с мальчиками ym . Так как все знакомства взаимные, выходит $tn = ym$. т.е.

$$\begin{cases} tn = ym \\ m + n = 49 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} tn &= ym \\ n &= \frac{ym}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n = \frac{m \cdot g}{t} \\ m + n = 79 \end{cases}$$

$$m + \frac{m \cdot g}{t} = 79 \quad (\text{умножаем на } t, \text{ ведь } t \neq 0.)$$

$$mt + mg = 79t$$

$$m = \frac{79t}{t+g}$$

не верно исследовать делимость, когда m и g не являются целыми

79 - число простое, а m - число целое. Тогда либо $t+g \mid 79$, либо $m = 79k$, где

k - натуральное число, причем $k \geq 1$.

В 1-ом случае одно из чисел t и g должно быть > 39 , ведь $39 \cdot 2 = 78$, а $78 < 79$, что не удовлетворяет условию задачи ("у каждого не более 39 знаков").

Во втором случае $m \geq 79$, что не удовлетворяет условию $m+n=79$, где n - целое и $n > 0$. Выходит противоречие, а значит

$$\frac{m \cdot g}{t} \neq n$$

Ответ: Нет, не может.

Из условия $x^2 - x > y^2$ следует

$$x^2 - x = y^2 + m, \text{ где } m > 0.$$

Из условия $y^2 - y > x^2$ следует

$$y^2 - y = x^2 + n, \text{ где } n > 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} y^2 - y = x^2 + m \\ x^2 - x = y^2 + n \end{cases} \quad (\text{складываем})$$

$$y^2 - y + x^2 - x = x^2 + m + y^2 + n$$

$$-y - x = m + n$$

$$-(y + x) = m + n \quad (m > 0 \text{ и } n > 0 \Rightarrow m + n > 0)$$

$$-(y + x) > 0$$

$$y + x < 0$$

Подобное возможно в 3-ех случаях

$$1) \quad y < 0 \text{ и } x < 0$$

$$2) \quad y > 0 \text{ но } x < 0 \text{ тогда } |x| > |y|$$

$$3) \quad y < 0 \text{ но } x > 0 \text{ тогда } |x| < |y|$$

Рассмотрим 2-ой случай:

если $y > 0$, тогда $-y < 0$, что означает что

$$y^2 > y^2 - y > x^2 \quad (\text{используем условие: } y^2 - y > x^2)$$

$$y^2 > x^2$$

$$|y| > |x|$$

Но, согласно варианту 2, $|x| > |y|$.

Выходит противоречие.

Рассмотрим 3-ий случай:

если $x > 0$, то $-x < 0$, тогда
 $x^2 > x^2 - x > y^2$ (по условию $x^2 - x > y^2$)

$$x^2 > y^2$$

$$|x| > |y|$$

Но, согласно варианту 3, $|x| < |y|$.

Получили противоречие. +

Остается вариант 1. при $x < 0$ и $y < 0$
 выведут $xy > 0$.

Вариант $x = 0$ или $y = 0$: не

• при $x = 0$; $x^2 - x > y^2$, т.е. $y^2 < 0$, но

по определению квадрата $y^2 \geq 0$, что

~~не~~ получили противоречие

• при $y = 0$; $y^2 - y > x^2$, т.е. $x^2 < 0$, но

по определению квадрата $x^2 \geq 0$,

получили противоречие.

Ответ: $xy > 0$, т.е. со знаком "+".

75%

Если Тетя видит "подрядку" (или может с орлами, ор удерживает на них и полагает в комбинации может: (P) (P) (O) или (O) (P) (P) или (P) (O) (P).

Так Тетя продолжает, пока "орел" не станет встречаться на монетах 3 раза подряд.

Возьмем в качестве левой монеты. Если она "решка", то ПЕРЕХОДИМ К ВТОРОЙ, ПОКА НЕ НАЙДЕМ "Орла". Как мы НАЙДИМ Орла, БЕРЕМ СЛЕДУЮЩИЕ 2 монеты. Если в них 2 и БОЛЬШЕ РЕШКИ, ПЕРЕХОДИМ К СЛЕДУЮЩЕЙ ГРУППЕ ИЗ 3-ех монет, ПОКА НЕ НАЙДЕМ подходящую. Эти 3 монеты либо

Возьмем в качестве левой монеты, если в них 2 и более "решки", то СДВИГАЕМСЯ на 3 монеты берем следующие 3 монеты, если в этой группе имеет вид (P) (O) (O), то "СДВИГАЕМСЯ" на 1 монету вправо, в итоге мы либо найдем группу, состоящую из вид (P) (O) (O) или (O) (O) (P), либо продолжим весь ряд чистых из 150 монет.

В

Отсюда
отрицательное
125

Имеется 2 вбл. ~~мешка~~: ~~либо эти~~ ~~мешки~~ лежат ~~в~~ ~~одной~~ ~~группе~~ ~~каждо~~ ~~из~~ ~~мешков~~, чтобы ~~либо~~ ~~1-ая~~ ~~мешка~~ была "ремкой" (тогда эту мешку мы ~~обрабатываем~~ и берем следующую), либо ~~была~~ чтобы в этой группе было ~~тогда~~ бы 2 "ремки".

Если группа имеет вид $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$, то после нашего хода она примет либо вид: $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$ (удовлетворяет условию) $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$ (удовлетворяет условию) $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$.

Вариант $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$ рассматривать не имеет смысла, ведь Вася бы так же походил. Итак, 3 мешка имеют вид $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$. Если после этого мешки лежат "ремка", то мы ~~переводим~~ ~~указываем~~ на 2-ую, 3-ую и 4-ую мешки, и получим из козырьки $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$ по виду $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$. В которой мы указываем на 1-ую 3 мешки, и наша группа ~~имеет~~ из 3-ех мешков будет иметь 2 ремки. Остается лишь вариант $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$, тогда 5-ая мешка - "ремка", и еще 3 мешка будут лежать подряд. И.е. $\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$.

Указываем на последние 3-мюкеты,
и ПОЛУЧАЕМ ЛИБО $\begin{pmatrix} \textcircled{O} & \textcircled{P} & \textcircled{P} & \textcircled{O} & \textcircled{O} \end{pmatrix}$
Указываем на 2-ую, 3-ью и 4-ую $\begin{pmatrix} \textcircled{O} & \textcircled{P} & \textcircled{O} & \textcircled{P} & \textcircled{O} \end{pmatrix}$
мюкеты, в обо их случаях выходим $\begin{pmatrix} \textcircled{O} & \textcircled{O} & \textcircled{O} & \textcircled{O} & \textcircled{O} \end{pmatrix}$
После чего, указав на 1-ые 3 мюкеты,
Получаем Кусочку как и раньше, в
итого все 150 мюкет разбиты на
группы не имеют группы, в которых 2
"орна". Если выбрать любую группу,
то в ней ОКАЖЕТСЯ 2 "РЕШКИ".
Т.е. как бы мы ни поведем, Вася
Идеально сделает 2 "решки" "Орнаментами" умень-
шив количество мюкет, лежащих решками,
на 2. Таким образом, фактору
порядка 2^{10} не нужно увеличивать. И максимальные
уже достигнуты. Если в любой
группе есть 2 "решки", и мюкет 150,
то максимальное $K \equiv 150 : 3 : 2 = 100$.
Мюкеты.

Ответ 100 мюкет.

Примечание $\textcircled{O}$ - обозначение мюкеты,
лежащей орном вверх
 $\textcircled{P}$ - обозначение мюкеты,
лежащей решкой вверх.

Данный алгоритм будет повторяться, пока не будут выбраны все 150 монет, тогда все монеты среди всех монет нельзя будет выделить 3 подряд идущие, которые не будут иметь в 2 решки и одну орла, т.е. при переборе любых 3-х монет образуется 3 подряд идущих орла. Т.е. количество орлов K будет максимально, и $K = 150 : 3 \cdot 2 = 100$ монет. Впоследствии с 6-го последнего монетом, которые имеют меньше 3-х "решек", решаются крайне просто.

Число делится на $\overline{125}$, если число, образованное его тремя последними цифрами, делится на 125

Число делится на 40, если число, образованное его тремя последними цифрами 0 и число, образованное его двумя предпоследними цифрами, делится на 4.

Пусть это число будет $d_1 d_2 d_3 \dots d_n abc$, или

$$\overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_n 000} + \overline{abc}$$

Так как $0:4=0$, получим $\overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_n 000:125}$

$$\text{и } \overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_n 000:40}$$

Иными словами $\overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_n 000} = 125k = 40l$,

где k и l — натуральные числа.

Изосредств определения делимости с остатком, получим

$$125k + \overline{abc} = 125m + s \quad (\text{где } s \text{ — это остаток,}$$

$$40l + \overline{abc} = 40n + s \quad (\text{а } m \text{ и } n \text{ — натуральные числа})$$

$$125m + s = 40n + s$$

$$125m = 40n$$

$$25m = 8n$$

Поскольку m и n не делятся на 25 и 8 взаимно простыми, целыми корнями уравнения

Включая числа $m = 8 \nmid n$ и $n = 8 \nmid 25z$, где z - натуральное.

Подставим

$$\begin{cases} 125k + \overline{abc} = 125 \cdot 8z + S \\ 406 + \overline{abc} = 40 \cdot 25z + S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125k + \overline{abc} = 1000z + S \\ 406 + \overline{abc} = 1000z + S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125k + \overline{abc} = 1000z + S \\ 406 + \overline{abc} = 1000z + S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125k + \overline{abc} = 1000z + S \\ 406 + \overline{abc} = 1000z + S \end{cases}$$

Контр. пример.

$$125 \cdot 4 + 236 = 1000 \cdot 1 + S$$

$$S = 236$$

$1000z > \overline{abc}$ в любом случае, тогда $\overline{abc} = S$. Однако S - это остаток при делении (в том числе) на 40, т.е. $S \leq 39$. Тогда $\overline{abc} < 40$, тогда $a = 0$.

Следует в разряде сотен у этого числа может стоять "0".

и 5

Получается

Региональный этап
олимпиады им. Леонарда Эйлера
2021 год, 2 день

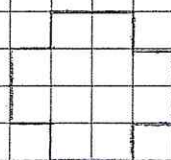
Шифр: 803

Таблица для жюри

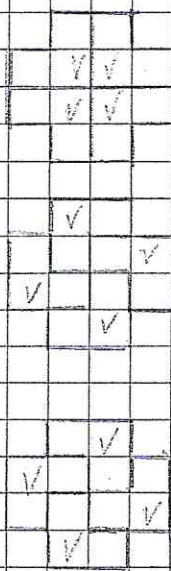
6	7	8	9	10	Сумма
4 МД	X	0 Ю.В.	0 МД	0 МД	7
7 ДА	X	0 ДА	0 ДА	0 ДА	
7 Ю.В.	X	0 МД	0 Ю.В.	0 Ю.В.	

$\sqrt{1.1}$ $\sqrt{6}$

Данная фигура существует. Пример
данной фигуры и 3-ех вариантов
ее разрезаний при которых
выполняется условие задачи,
приведенных ниже:



- пример фигуры



примеры разрезаний

$\sqrt{2}$

Окружность — множество точек, одинаково удаленных от другой точки, которая является центром.

Из этого из данного определения, следует ~~вывод~~ что в прямоугольнике радиус ^{прямой} ~~вписанной~~ ^{вписанной} ~~описанной~~ ^{описанной} окружности ~~будет~~ ^{будет} больше половины ~~меньше~~ ^{меньше} стороны. И.е. радиус ~~будет~~ ^{будет} наименьшим, если сама ~~разрезает~~ ^{разрезает} квадрат на ~~прямоугольники~~ ^{прямоугольники} со стороной 1 и x , где $0 < x < 1$. Если стороны имеют одну сторону всех ~~прямоугольников~~ ^{прямоугольников} 2, а другие: $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$.

$$\text{Тогда } n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = 2$$

А радиусы этих кружочков ~~прямоугольников~~ ^{прямоугольников}: $n_0/2, n_1/2, n_2/2, n_3/2, \dots, n_k/2$

Тогда сумма всех радиусов:

$$n_0 : 2 + n_1 : 2 + n_2 : 2 + n_3 : 2 + \dots + n_k : 2 = \\ = \frac{n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

И.е. сумма радиусов этих кружочков ~~при минимуме~~ ^{при минимуме} всегда $k \geq 1$

~~Омне~~

ШО

Согласно условию единицы какой-либо расстановке значений в таблице добиваться нельзя, но ответ на задачу "нет".

Для упрощения возьмем

Очевидно, что если кельзы сделать все числа равными единице в таблице 2021×2021 , то кельзы сделают все числа равными единице в таблице 2021×2021 если в ней встречаются числа

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ можно

Обозначим r ряды и c столбцы таблицы. Разделим выбранные числа в данной таблице (пока что) только на 1, что не изменит ситуацию. Сколько бы раз не прибавлять единицу к строке 1 или ряду 1, мы получим таблицу вида $\begin{bmatrix} a & a+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

либо $\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, где a — взаимно простые,

т.е. a и $a+1$ взаимно простые либо прибавим 1 к строке

2 или ряду 2, выйдет: $\begin{bmatrix} a & a+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ либо $\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ 2 & a+1 \end{bmatrix}$

После сокращения строки 1 либо ряда 1 на $a+1$

выйдет: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ либо $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, что является противоречием

из начала цикла.

Отсюда следует

Это указывает на невозможность
гарантированно добиться, чтобы
все числа стали равны 1.

Ответ: Невозможно.



Если $n > 2$, то $n! + n^3 + 1 \neq 2$,

Если $n! + n^3 + 1$ — простое, которое > 2 , то
это число — нечетное, тогда $n! + n^3$ — четное,

если $n \neq 2$, то $n!$ — четное, если т.е. n^3 — четное,

тогда n — четное, тогда n^2 — четное, тогда

$n^2 + 2$ — четное, верь 2 — четное. Отсюда из

теореме математики знаем, что

любое четное число, ~~большее двух~~, можно
представить в виде суммы двух

простых чисел и не требует доказа-

тельств. *эта гипотеза пока что не доказана*