Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

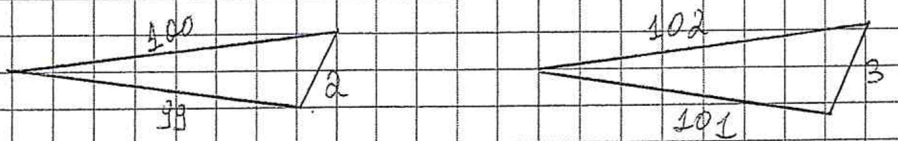
Шифр: 1001

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
7	7	X	X	X	14
7	7	x	x	x	14

№1

Самая большая палочка была стороной какого-то Δ, и по неравенству Δ, ~~она не~~ её длина меньше суммы длин каких-то 2х других палочек. Следовательно, её длина меньше суммы длин 2й и 3й по величине палочек, попавших в первую группу. Наибольшая сторона короче суммы двух других, значит из палочек 1й группы можно построить треугольник.
Для 2й группы можно подобрать контрпример


— начальные Δ

$2<99<100<99+2$ $\qquad$ $3<101<102<102+3$

~~Ов~~ Из 3х наименьших палочек (длины 99, 3 и 2) нельзя собрать Δ, т.к. $99>2+3$

Ответ: из палочек 1й группы можно собрать треугольник всегда, а из палочек 2й — не всегда.

№2

Предположим, может. В таком случае одно из чисел положительно, а другое отрицательно. Пускай $x>0>y$.
т.е. рассуждения при $y>0>x$ аналогичны
(~~нер-в~~ система нер-в симметрическая). Если $|y|\geq|x|$, то ~~x^4+y^4~~ $x^4\leq y^4$; $x<x^4-y^4\leq 0$, получим противоречие с тем, что $x>0$. Значит, если $x>0>y$, то $|x|>|y|$.

Региональный этап ВсОШ по Математике 2021

Пишите исключительно на лицевой стороне бланков, в специально отведенной (клетчатой) области

ШИФР 1001

Однако если $|x| > |y|$, то

$$x^4 > y^4$$

$$x^4 - y^4 > 0 > y^4 - x^4$$

$x < x^4 - y^4$ (по усл.) $| \cdot (-1)$

$-x > y^4 - x^4 > y$. $\quad -x > y$

Т.к. $-x$ и y - отрицательные, а $-x > y$, то $|-x| < |y|$; $|x| < |y|$. Получаем одновременно, что $|x| < |y|$ и $|x| > |y|$. Получили противоречие, следовательно произведение не может быть отрицательным.

~~Рассуждения~~ Ответ: нет, такого быть не может

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1001

Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7 [illegible]	7 [illegible]	2 [illegible]	0	0	16 [illegible]
7 Ан	7 Ан	2 Ан	0 Ан	0 Ан	16 Ан

№ 10.6

a, b - десятизначные, а $a+b$ ~~не более чем~~ содержит не более 11 знаков (оно $\le \underbrace{9\ldots9}_{10} + \underbrace{9\ldots9}_{10} = \underbrace{19\ldots98}_{11}$)

~~Предположим, все 31 цифры~~ может быть 31 нечетная цифра (т.е. все нечетные). Тогда последняя цифра a - нечетная, и b - нечетная. Тогда a, b - нечетные числа, и $a+b$ - четное, следовательно последняя его цифра четная, и нечетных цифр не более 30. Получили противоречие с предположением, значит нечетных цифр не более 30. Пример для 30 нечетных цифр:

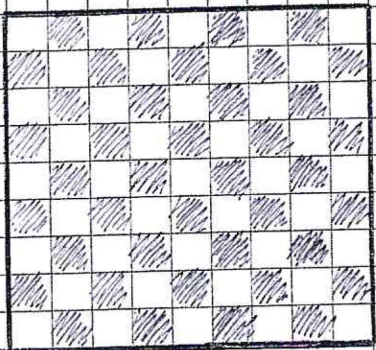
$a = 5555555555$

$b = 5555555556$

$a + b = 11111111111$

7б

№ ~~8~~10.7 Если в таблице есть число n, то его обязательные соседи — $n-3$ и $n+3$ (если они относятся к промежутку $[1; 81]$ и n). ~~Таким образом~~ Заметим, что ~~соседи~~ обязательные соседи имеют одинаковый остаток при делении на 3. Таким образом, таблицу можно разделить на 3 цепочки. В первой все числа дают остаток 1 при делении на 3; во второй - 2; в третьей - 0. Поскольку цепочек 3, а угловых клеток 4, то одна из цепочек будет содержать две угловые клетки. То есть, числа в двух угловых клетках имеют одинаковый остаток при делении на 3, а значит их разница кратна 3.



□ - чет/нечет

▨ - нечет/чет

(при переходе на соседнюю клетку прибавляется 3 (нечет), и четность меняется)

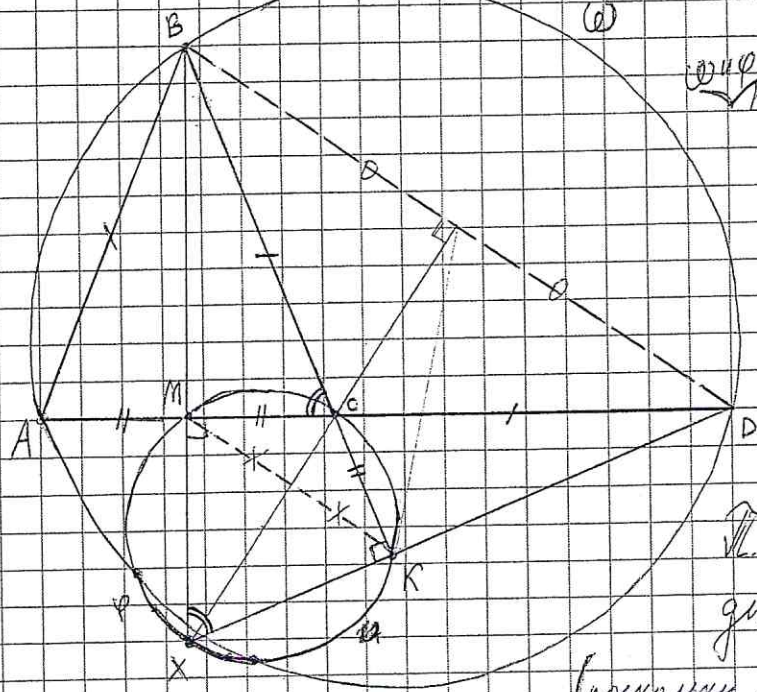
Кроме того, заметим, что в одной цепочке все соседи по стороне имеют разную четность. Если мы покрасим доску в шахматную раскраску, и ~~однажды~~ начнем с четного числа с белой клетки, то при переходе на черную (+нечет) мы всегда будем получать нечетное число, а на белую — снова четное. Аналогично если мы будем начинать с черной клетки или нечетного числа. Таким образом, клетки одного цвета содержат числа одной четности, а разного — разной четности. Все угловые клетки покрашены в один цвет, и числа в них одной четности. Значит, разница между числами в угловых клетках всегда кратна ~~3~~ 2. Уже доказано, что есть 2 числа в угловых клетках, разница которых кратна 3, в значит, их разница кратна НОК$(2;3)=6$. ~~Значит,~~ Такие 2 клетки найдутся всегда.

Ответ: да, утверждение верно.

7б

ШИФР 1001

№10.8



Предположим, что это не так (т.е. окружности пересекаются или не имеют общих точек).

1) Т.к. $\triangle ABC$ — р/б, ~~то BM~~ а BM — медиана, то $BM \perp AC$, а

2) Пускай $BM \cap \omega = X$. Т.к. $BM \perp MC$, то CX — диаметр, и $CX \perp MK$ (поскольку $MC = KC$), а так же CX делит MK пополам.

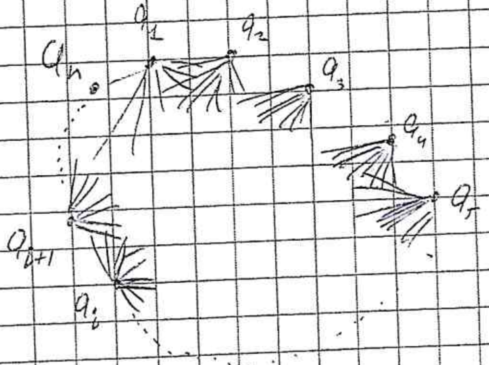
3) Заметим, что $\triangle BCD \sim \triangle KCM$ ($\angle MCK$ и $\angle BCD$ вертикальные; $MC : CK = DC : BC = 1$). Тогда $\angle CMK = \angle CDB$, и $BD \parallel MK$. Кроме того $\triangle CMB = \triangle CKD$ (~~по 2 сторонам~~ $MC = KC$; $BC = DC$; углы C вертикальны), и $DK = BM$. Отсюда $BMKD$ — р/б трапеция. Известно, что через середины ~~сторон~~ оснований, точку пересечения боковых сторон и точку пересечения диагоналей в ней проходит единственная прямая, и т. $X \in DK$, а так же XC делит BD пополам.

4) Т.к. $CMXK$ — вписанный, то $\angle MCK = 180° - \angle MXK$; $\angle ACB = 180° - \angle MCK = \angle MXK$ (как смежные)

не доказано, что точка X принадлежит ω

2 б

№ 10.10 Пускай нет.
Представим задачу в виде полного графа, в котором числа в тетради — вершины, а ребра — их попарные ~~[illegible]~~ НОКи. ~~И~~ Всего ребер $\frac{n(n-1)}{2}$, а это значит, что все НОКи являются членами прогрессии. Причем среди них для каждого числа из тетради найдется хотя бы $(n-1)$ ребер, выходящих из этого числа, следовательно делящихся на них. Следовательно, все разницы между ними тоже кратны ~~к~~ числу вершине, из которого они выходят.



0 б

№ 10.9 В случае для $n=3$ после того, как зритель открывает вторую карточку, на столе остается всего одна закрытая карточка. Число на ней можно определить методом исключения. Таким образом, все числа, в т.ч. и 1 и 2, будут однозначно определены.

частный случай

0 б