

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1009

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
4 <i>хч</i>	7 <i>хч</i>	0 <i>хч</i>	X	7 <i>хч</i>	
4 <i>хфс</i>	7 <i>хфс</i>	0 <i>хфс</i>	X	7 <i>хфс</i>	18 <i>хфс</i>

10.5

Первый ход должен сделать Петя, закрасив самую большую диагональ (в случае поля 100×100 , эта диагональ — 100 клеток). Тогда у нас после первого хода поле разделится на 2 равных участка, т.к. всего клеток $100 \cdot 100 = 10000$, Петя закрасил 100, осталось: $10000 - 100 = 9900$, по $\frac{9900}{2} = 4950$ клеток каждая из равных частей.

~~После этого~~ После этого Петя должен «повторять» ходы за Васей (следует помнить, что Вася закрасивает ~~вертикали~~ ^{Петя} клетки по вертикали, поэтому «повторяя» ~~Петя~~ закрасивает по диагонали столько же клеток, сколько и Вася, но на другой части поля).

Для удобства рассмотрим поле 10×10 , чтобы понять, как должен ходить ~~Петя~~ и почему побеждает он.

На рис. 1 я показал поле после 1-го хода Пети, выделенная на рисунке 1 — прищипли линией, которую разделим каждую из 2-ух частей на ~~вертикали~~ ~~диагонали~~ вертикали и диагонали, т.е. клетки стоящие

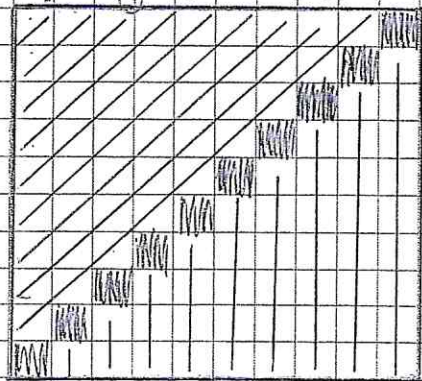


рис. 1

по диагонали и вертикали, которые можно закрасить за 1 ход. ~~Заметим~~ (чтобы было видно, я показал на одной части диагонали, а на другой — вертикали из клеток, но следует понимать, что такие «диагонали» «вертикали» есть на каждой из частей). Заметим, что количество клеток в диагоналях увеличивается одинаково от 1 клетки до 9 (1, 2, 3, 4, ..., 8, 9), поэтому Петя может просто повторять за Васей каждый ход, закрасивая на ~~той~~ ^{столько} другой половине поля ~~также~~ ^{тоже} ~~те~~ ^{то} же клетки, ~~если~~ ^{как} и Вася, а т.к. количество клеток такое, то Петя, чтобы победить

будет закрашивать такое же кол-во клеток (а если просчитать их вместе, то Вася и Петя ~~закрасят~~ когда походит каждый, закрасят четное кол-во клеток, и Петя закрасит последнюю/ые. Но Петя при этом должен ходить буквально также, как и Вася, то есть «закрывать» еще те же ходы, что и Вася закрасил. Петя, но ведь Петя играет «по диагонали», а Вася — «по вертикали». Рассмотрим как ходить Петю. Вася в первый ход, к примеру, может закрасить свой самый большой ряд в 9 клеток на одной из половин (рис. 2). Когда Петя тоже должен закрасить свой самый большой ряд на другой половине (а мы знаем, что он тоже в 9 клеток) (рис. 2). Тогда получается, что Вася забрал по 1 клетке из каждой диагонали на одной половине, а Петя — по одной клетке из каждой вертикали на другой половине, т.е. все симметрично относительно забираемых клеток. На этом же (рис. 2) я показал следующий возможный ход Васи, а потом и «ответ» Петю. Вася может закрасить 2 клетки по вертикали, значит Петя тоже должен закрасить 2 клетки по диагонали на другой половине. Вася закрасил клетки на той вертикали, где у него после 1-го хода Петю было 6 свободных клеток по вертикали, значит и Петя должен закрасить клетки на диагонали, которая была в 6 клеток (опять же на другой стороне). Но чтобы точно понять какие именно 2 клетки (в другом случае может быть больше или меньше) закрасить, мы должны заметить, что Вася закрыл этими клетками одну клетку из ^{изначальной} диагонали в 5 клеток и одну — из диагонали в 6 клеток (на этой же половине), поэтому Петя должен сделать все на-

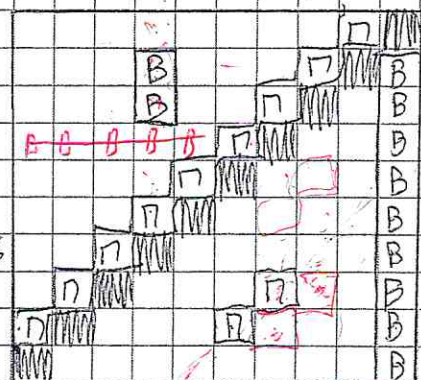


рис. 2

берет: на другой половине закрасить две клетки на диагонали, в которой сначала было 6 клеток, причем эти 2 клетки должны закрыть 1 клетку на вертикали в 5 клеток, и 1 клетку - на ~~горизонтальной~~ вертикали в 6 клеток (рис. 2).

Таким образом, закрасив сначала самую большую диагональ, а потом «симметрично», т.е. по лемме, описанной выше, закрасившая клетка за Васей победит Петя, играя на поле 100×100 .

10.2 $x \neq 0; y \neq 0$

$$x^4 - y^4 > x$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) > x$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) > x$$

$$-(y - x)(x + y)(x^2 + y^2) > x$$

$$(y - x)(x + y)(x^2 + y^2) < -x$$

$$y < -x$$

$$y^4 - x^4 > y$$

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) > y$$

$$(y - x)(y + x)(y^2 + x^2) > y$$

$$xy < 0$$

при $x < 0, y > 0$
или

при $x > 0, y < 0$.

Значит при $x > 0, y < 0$: $|x| < |y|$; а при $x < 0, y > 0$: $|y| < |x|$.

Но при $x > 0$: $\underbrace{(x - y)}_{> 0} \underbrace{(x + y)}_{< 0} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{> 0} < 0$, а $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) > x$ (по условию)

Значит это неверно. ($|x| < |y|$)

При $x < 0$: $\underbrace{(y - x)}_{> 0} \underbrace{(x + y)}_{< 0} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{> 0} < 0$, а $(y - x)(x + y)(x^2 + y^2) > y$ (по условию)
($|y| < |x|$) Это тоже неверно.

Мы получили несоответствие при $x < 0, y > 0$ и $x > 0, y < 0$, значит $xy < 0$ - неверно.

Ответ: нет, не может.

10.3

$$a = \frac{b(b+c-5)}{15} = \frac{3cb}{15} - \frac{5b}{15} = \frac{cb}{5} - \frac{b}{3}, \text{ где } \frac{cb}{5} > \frac{b}{3}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

10.1

$$a_1 + b_1 > c_1; a_2 + b_2 > c_2$$

Если две стороны одного треугольника в сумме дают одну из сторон второго треугольника, то из самых маленьких сторон этих треугольников нельзя получить $\Delta: 4; 5; 8; 9; 11; 12$

для упрощения

~~то для упрощения~~

верный пример: 5)

4)

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1009

Таблица для жюри

1	2	3	4	15	Сумма
7	3	1	0	X	11
7	3	1	0	X	11

10.6

При сложении двух нечётных чисел мы получили чётное число. Рассмотрим сложение a и b в столбик (для удобства), при этом предположим, что числа a и b состоят только из нечётных цифр. Ведь нам надо добиться максимального количества нечётных цифр. Запишу $a = x_1x_2x_3x_4 \dots x_9x_{10}$ (где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ значат цифры в числе a , а не произведения $x_1, x_2, \dots, x_{10}$), также $b = y_1y_2y_3y_4 \dots y_9y_{10}$ (где $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ — цифры).

$$\begin{array}{r} a \\ + b \\ \hline a+b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10} \\ y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9y_{10} \\ \hline a+b \end{array}$$

Как я сказал, $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$ и $y_1, y_2, \dots, y_9, y_{10}$ — нечётные числа, ведь нам нужно их максимальное кол-во. Тогда $a+b$ — чётное, ведь, как я говорил, мы знаем, что при сложении двух нечётных, получим чётное. Первая цифра (разряд единиц) у числа $a+b$ — чётное, но может быть тогда остальные разряды — нечётные цифры? При сложении двух чисел может получиться число с тем же кол-вом разрядов, либо разрядов будет на 1 больше, а цифра старшего разряда будет 1 ($9+9=18$, а 9 — самая большая цифра). Ну а если к чётной цифре прибавить нечётную (в каком случае — 1), то мы получим нечётную. Это нам и надо. Поэтому возьмем два таких числа a и b , чтобы цифры этих чисел были нечётные, а цифры одного разряда в сумме давали число больше 9 (это число будет чётным, т.к. сумма чётно-нечётных). В итоге мы получили по 10 нечётных цифр в каждом числе (a и b), а ещё 11-значное число ($10+1$), цифра единиц которого — чётная.

(чтобы получить нечётное число в разряде единиц числа $a+b$, нужно чтобы в разряде единиц числа a или b стояла ~~ли~~ чётная цифра, что ~~было~~ бессмысленно, ведь кол-во нечётных цифр на доске не изменится). Получим: $2 \cdot 10 + 11 - 1 = 30$ нечётных цифр может быть максимум на доске. Пример: $5555555555 + 5555555555 = 11111111110$.

10.7.

Так как числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках, то в таблице 9×9 ~~числа~~ числа разделятся на 3 группы, причем каждая группа выстроится в своеобразную «змейку», ведь любые два числа (отлич. на 3) стоят в соседних по стороне клетках, это значит, что все числа ~~должны~~ должны иметь 2 соседних числа, ~~или~~ отличающихся на +3 и на -3. Т.е. у числа x «соседи» будут: $x-3$ и $x+3$, а вся эта цепочка с ними: ~~или~~ $x-3; x; x+3$; но стоит заметить, что $(x+3) - (x-3) = 6 \div 6$, т.е. в этих трех группах разность любых 2 чисел, стоящих через одно число (x), будет равна 6, а соответственно и делиться на 6. Стоит отметить, что все числа имеют по 2 таких «соседа», кроме: 1, 2, 3 и 79, 80, 81; т.к. эти числа являются первыми или последними в своих группах и имеют ~~то~~ по 1 число, отличающееся от них на 3. У нас есть 3 группы таких чисел, которые должны создавать цепь, т.е. не прерываться при записи, а идти последовательно в одной строке или столбце. Если предположить, что двух упомянутых клеток, разность которых делится на 6 нет (т.е. таким образом можно расположить числа), то вспомнив о том,

что разность любых чисел $(x+3)$ и $(x-3)$ (записанных через 1 число x), делится на 6, сделаем вывод, что двух условных клеток, разность чисел в которых делится на 6, не будет тогда, когда все числа 1 группы записаны в одной строке или столбце (по вертикали/горизонтали), ведь если любые два числа расположить изменяя направление (сначала по вертикали, потом горизонтали, или наоборот), вот так:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array}$$

рис. 1.2

где $x_1 = x-3$; $x_2 = x$; $x_3 = x+3$, очевидно что $(x_3 - x_1) : 6$.

Поэтому расположить числа, меняя направление цепочки нельзя, значит все числа 1 группы нужно либо в одной горизонтали либо в вертикали. Всего групп 3, чисел - 81, в каждой группе: $\frac{81}{3} = 27$ чисел, а поле 9×9 , т.е. в столбцах и строках максимум по 9 клеток, а значит, располагая числа, нам придётся прерывать цепочку (даже несколько раз) и создать "уголок", как на рис. 1.2, где $(x_3 - x_1) : 6$. Значит обязательно найдётся две условных клетки, разность чисел в которых делится на 6.

Ответ: Да, верно.

10.8.

$\angle BCD = \angle MCK$ (вертикальные)

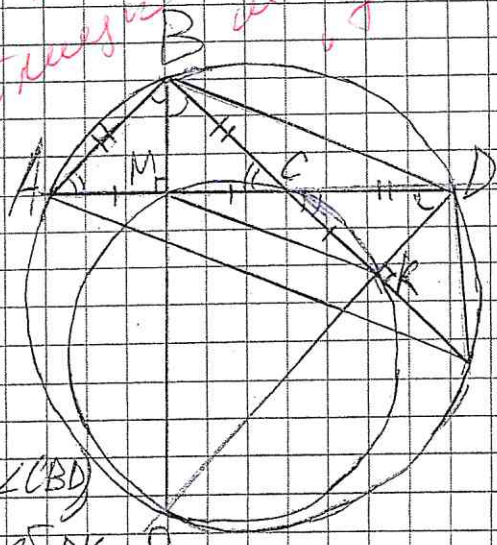
$MC = CK$ (по условию) $\Rightarrow \angle CMK = \angle CKM$

$BC = CD$ (по условию) $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB$

$\angle CMK = \angle CKM = \angle CBD = \angle CDB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle MCK$; $BD \parallel MK$ ($\angle CKM = \angle CBD$)

как накрест лежащие при пересеч. секущей BK



трапеции BD и $МК$). $BDKM$ - равнобедренная трапеция ($\angle MBD = \angle BDK$, BD и $МК$) $\Rightarrow \angle KCS = \angle BMC$ - прямые; т.к. BM - медиана равнобедренного $\triangle BDK$. Проведем BO и DO , и докажем, что O лежит на обеих данных окружностях, и O - одна. $\angle OMK = \angle OKM$ т.к. $\angle OMK = 180^\circ - \angle BMK$; $\angle OKM = 180^\circ - \angle MKD$, но и $\angle MBD = \angle BDO = 180^\circ - \angle MKD = 180^\circ - \angle BMK$, тогда $\angle OBD = \angle OMK = \angle OKM = \angle ODB$ (односторонние при $МК$ и BD), значит $\angle MOK = \angle BOD$, а $\triangle MOK$ - вписанный в окружность I ; $\triangle BOD$ - вписанный в окружность II . Окружности касаются в O .

10.9.

Как то так. А можно на окружности отметить точку O в центре? Про нее тоже надо сказать.

При $n=4$ фокус не всегда удастся и открыв 2 карты нельзя сразу узнать о 2 других точках;

При $n=3$ фокус очевидно удастся, ведь открыв 2 карты, 3-я неизвестна.

При $n=5$ нужна тактика, например карту 5 нужно ставить так, чтобы слева от неё была 1, справа - 2, а 3 и 4 нужно ставить за 1 карту от 1 и 2 соответственно, тогда открывая карту посередине, и получив информацию ещё об одной карте, можно легко понять расположение 1 и 2; Если 5 поставить так, как сказано не получится, то ставить надо как ближе к 2 или 1.

С большим кол-вом карт фокус не удастся.

Ответ; при $n=3$; $n=5$.