Метод математической Индукции

Выполнила: Антонова Светлана
ученица 11"Б" класса
Руководитель: Терентьева О. А.
учитель математики

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Цель работы:

- Познакомиться с методом математической индукции, систематизировать знания по данной теме и применить их при решении математических задач и доказательстве теорем.

Задачи работы:

1. Актуализация практической значимости математических знаний.
2. Развитие нравственных представлений о природе математике, сущности и происхождении математической абстракции.
3. Освоение разных методов и методик работы.
4. Обобщение и систематизация знаний по данной теме.

Проблема:

Показать практическую значимость метода математической индукции.

Переход от общих утверждений к частным называется

дедукцией.

В математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим, т.е. использовать метод, противоположный дедуктивному, который называется

индукцией.

Пример неполной индукции

$P(x)= x^2+ x+ 41$

$P(1)= 43;$ $P(2)=47;$ $P(3)= 53;$ $P(4)= 61;$ $P(5)= 71$

$P(0)=41;$ $P(-1)=41;$ $P(-2)=43;$ $P(-3)=47;$ $P(-4) =53$

Возникает гипотеза, что значение трехчлена $P(x)$ является простым числом при любом целом значении x.

Но высказанная **гипотеза ошибочна**, так как, например, $P(41)= 41^2+41+41=41\cdot 43.$

Вывод:

Метод неполной индукции, как мы видим, не приводит к вполне надежным выводам, но он полезен тем, что **позволяет сформулировать гипотезу**, которую потом можно доказать точным математическим рассуждением или опровергнуть.

Принцип математической индукции:

Если предположение, зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 и из того, что оно истинно для n=k
(где k-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа n=k+1, то предположение истинно для любого натурального числа n.

Этапы решения:

1.база (показываем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев ($n = 1$);

2.предположение (предполагаем, что утверждение доказано для первых k случаев;

3.шаг (в этом предположении доказываем утверждение для случая $n = k + 1$);

4.вывод (утверждение верно для всех случаев, то есть для всех n).

Пример 1. Найти сумму $Sn = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$.

Это позволяет высказывать **гипотезу (** предположение), что при любом натуральном n $Sn = \frac{n}{n+1}$.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

Гипотеза должна быть верной и при $n = k+1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}-$$

Неравенство Бернулли

Доказать, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $a > -1$ имеет место неравенство, называемое ***неравенством Бернулли*** (названо в честь швейцарского математика XVII в. Якова Бернулли)***:***

$(1+a)^n \geq 1 + an.$

1) Если $n=1$, то очевидно, что неравенство верно: $(1+a)^1 \geq 1+a.$

2) Предположим, что неравенство верно при $n=k$: $(1+a)^k \geq 1 + ak.$

$(1+a)^{k+1} \geq 1+ak+a+a^2k.$

$(1+a)^{k+1} \geq a(k+1).$

Полученный результат показывает, что неравенство верно и при $n=k+1.$

Второй вариант метода математической индукции.

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных *n,* а лишь для натуральных *n,* начиная с некоторого числа *p.*

Утверждение верно при всех натуральных значениях n ≥ p, если:
1)оно верно при *n* =p (а не при *n* = 1, как было сказано выше);
2)из справедливости этого утверждения при *n* = k, где k ≥ p (а не k ≥ 1, как сказано выше), вытекает, что оно верно и при *n* = k + 1.

Докажите, что для любого $n>1$ справедливо равенство

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

Мы должны доказать, что $P_n=\frac{n+1}{2n}$.

Для n=1 формула не верна (1- 1) = 1(неверно).

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2. $1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$, $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$- верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е. $P_k=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})=\frac{k+1}{2k}$

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$$P_{k+1}=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$P_{k+1}=P_k\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Докажем, что $2^n > 2n + 1$ при любом натуральном $n \geq 3$.

1) При $n = 3$ неравенство верно. $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.

2) Предположим, что $2^k > 2k + 1$ $(k \geq 3)$.

3) Докажем, что $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = (2k + 3)(2k - 1) > 2k + 3$, так как $2k - 1 > 0$ при любом натуральном значении k. Следовательно, $2^n > 2n + 1$ при всех $n \geq 3$.

Доказательство формулы

Докажем ,что:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$, n – натуральное число.

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу

Формула верна при n=k, т.е.

$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\left(k^2+4k+4\right)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Делимость

Докажите, что при любом натуральном числе n $9^{n+1} - 8n - 9$ кратно 16.

1) Проверим, что данное утверждение верно при $n=1$:

$$9^2 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64, \quad 64 \vdots 16.$$

При $n=1$ утверждение верно.

2) Предположим, что данное утверждение верно, при $n = k$:

$$(9^{k+1} - 8k - 9) \vdots 16.$$

И, докажем, что данное утверждение верно при $n = k+1$:

$$(9^{k+2} - 8(k+1) - 9) \vdots 16.$$

$$9^{k+2} - 8(k+1) - 9 = 9^{k+1} \cdot 9^1 - 8k - 8 - 9 = 9^{k+1} \cdot 9 - 8k - 17 =$$
$$= 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64k + 64 = 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k+1) =$$
$$= 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k+1).$$
$$\vdots 16 \qquad \vdots 16$$

Следовательно: $(9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k-1)) \vdots 16.$

Четность и нечетность выражений

Если n – натуральное число, то число $n^2 - n$ *четное*

1)При n=1 $1^2 - 1 = 0$ - четное число.

2)Предположим, что $k^2 - k$ - четное число. Так как $(k+1)^2 - (k+1) - (k^2 - k) = 2k$, а 2k – четное число, то и $(k+1)^2 - (k+1)$ четное.

Итак, четность $n^2 - n$ доказана при n=1, из четности $k^2 - k$ выведена четность $(k+1)^2 - (k+1)$..Значит, $n^2 - n$ четно при всех n.

Докажем, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна π(n-2).



1. Минимальное число углов — три. Поэтому начнем доказательство с $n = 3$. Получаем, что для треугольника формула дает $\pi (3 \sim 2) = \pi$ Утверждение для $n = 3$ справедливо.

2. Допустим, что формула верна при $n=k$. Докажем, что она верна для любого выпуклого $(к +1)$ -угольника. Разобьем $(к +1)$ -угольник диагональю так, что получим k-угольник и треугольник.

Так как формула верна для треугольника и k-угольника, получаем $\pi (к - 2) + \pi = \pi (к -1)$.

Итак, индукция (от лат. inductio — наведение, побуждение) — одна из форм умозаключения, приём исследования, применяя который от знания отдельных фактов приходят к общим положениям.

Метод математической индукции является одной из теоретических основ при решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств, решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач и т. д.

Вывод:

В ходе работы я узнала, что для того, чтобы решать задачи методом математической индукции необходимо знать и понимать основной принцип математической индукции.

Достоинством метода математической индукции является его универсальность, так как с помощью этого метода можно решить многие задачи. Недостатком неполной индукции является то, что порой она приводит к ошибочным выводам.

Обобщив и систематизировав знания по методу математической индукции, я убедилась в необходимости этих знаний Кроме того эти знания повышают интерес к математике, как к науке.

Так же в ходе работы приобрела навыки решения задач с использованием метода математической индукции. Считаю, что эти навыки помогут мне в будущем.

Список литературы:

1.Боковнев О. А., Фирсов В. В., Шварцбурд С. И. Избранные вопросы математики. 9 класс. Факультативный курс.-М.: Просвещение, 1979г.

2.Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. Москва: Просвещение, 1996г.

3.Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: методические рекомендации, дидактические материалы.

4.Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Шварцбурд С.И. М.: Просвещение, 1990г.

5.Петраков И. С. Математические кружки в 8-10 классах: Кн. для учителя М.: Просвещение, 1987г.

6.Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач учебное пособие для 10 класса средней школы – М.: Просвещение,1989г.